Problemas – Tema 5

Solución a problemas de vectores - Hoja 3 - Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6

Hoja 3. Problema 1

Resuelto por Cristina Sola (enero 2016)

Expresa el vector $\vec{u}=(0,8)$ **del espacio vectorial** $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ **como combinación lineal de los vectores** $\vec{v}=(3,-5)$ **,** $\vec{w}=(6,-2)$ **.**

$(0,8)=a(3,-5)+b(6,-2)$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$\begin{Bmatrix} 0=3a+6b \\ 8=-5a-2b \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0=3a+6b \\ 24=-15a-6b \end{Bmatrix} \rightarrow$ Sumamos $\rightarrow$ $24=-12a \rightarrow a=-2 \;,\; b=1$

En consecuencia $\rightarrow$ $(0,8)=-2(3,-5)+(6,-2)$

Hoja 3. Problema 2

Resuelto por Pablo Rogríguez (febrero 2016)

2. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(1,2)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$, demuestra que forman un sistema generador. Expresa $\vec{w}=(4,-4)$ como combinación lineal del sistema generador.

$$(x,y)=a(2,0)+b(1,2) \quad \rightarrow \quad (x,y)=(2a+b,2b)$$

Igualando componentes obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} x=2a+b \\ y=2b \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la segunda ecuación} \rightarrow \quad b=\frac{y}{2} \quad \rightarrow \text{De la primera} \rightarrow \quad a=\frac{2x-y}{4}$$

Podemos expresar a,b en función de las componentes del vector arbitrario (x,y) . Por lo tanto, sí forman sistema generador.

Para el vector $\vec{w}=(4,-4)$ tendremos:

$$a=\frac{2x-y}{4} \quad \rightarrow \quad a=\frac{2\cdot 4+4}{4}=3$$

$$b=\frac{y}{2} \quad \rightarrow \quad b=\frac{-4}{2}=-2$$

Es decir $\rightarrow$ $(4,-4)=3(2,0)-2(1,2)$

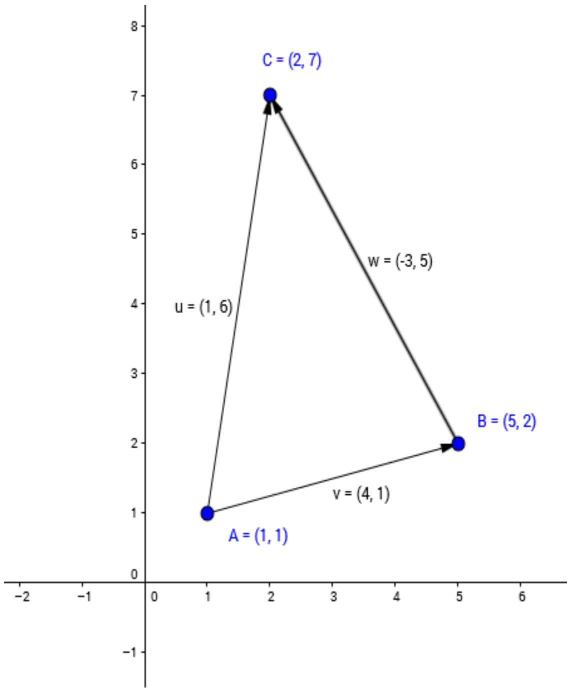
Hoja 3. Problema 3

Resuelto por Juan Luís Pérez Valero (febrero 2015)

3. Dados los puntos en el plano $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(2,7)$ represéntalos gráficamente y halla las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$.

Para hallar un vector a partir de dos puntos, restamos las coordenadas x e y correspondientes (final menos inicial)

$$\vec{AB}=(5-1,2-1)=(4,1)$$
$$\vec{AC}=(2-1,7-1)=(1,6)$$
$$\vec{BC}=(2-5,7-2)=(-3,5)$$



Hoja 3. Problema 4

4. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ **,** $\vec{v}=(-2,5)$ **,** $\vec{w}=(-4,3)$ **.**
a) Normalizarlos.

b) Hallar el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **,** $\vec{u}\cdot\vec{w}$ **.**

c) ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **, y los vectores** $\vec{u}$ **y** $\vec{w}$ **?**

a) $|\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5 \quad\rightarrow\quad \hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

$|\vec{v}|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29} \quad\rightarrow\quad \hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}})$

$|\vec{w}|=\sqrt{16+9}=5 \quad\rightarrow\quad \hat{w}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=(\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,4)\cdot(-2,5)=3\cdot(-2)+4\cdot5=14$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=(3,4)\cdot(-4,3)=3\cdot(-4)+4\cdot3=0$

c) $\acute{a}ngulo(\vec{u},\vec{v})=arcocos(\frac{u_x v_x+u_y v_y}{|\vec{u}||\vec{v}|})=arcocos(\frac{14}{5\sqrt{29}})=58,67^{o}$

$\acute{a}ngulo(\vec{u},\vec{w})=arcocos(\frac{u_x w_x+u_y w_y}{|\vec{u}||\vec{w}|})=arcocos(0)=90^{o}$

Hoja 3. Problema 5

5. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(2\cdot\sqrt{2},-2)$ **y** $\vec{v}=(\sqrt{2},-1)$ **.**

Tenemos dos definiciones del producto escalar.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x v_x+u_y v_y=2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-2)(-1)=4+2=6$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{w}|\cos(\alpha)=\sqrt{8+4}\cdot\sqrt{2+1}\cos(\alpha)=\sqrt{36}\cos(\alpha)=6\cos(\alpha)$$

Igualamos y podemos obtener el ángulo.

$$6=6\cos(\alpha) \quad\rightarrow\quad \cos(\alpha)=1 \quad\rightarrow\quad \alpha=0^{o}$$

Hoja 3. Problema 6

Resuelto por Javier Rodríguez Estella (Febrero 2016)

6. Calcula el valor de m para que $\vec{u}=(m,5)$ tenga por módulo 13 .

$$|\vec{u}|=13 \quad \rightarrow \quad \sqrt{m^2+25}=13 \quad \rightarrow \quad m^2+25=169 \quad \rightarrow \quad m^2=144 \quad \rightarrow \quad m=\pm 12$$