Problemas – Tema 5

Solución a problemas de vectores - Hoja 2 - Problemas 1, 2, 3, 4

Hoja 2. Problema 1

Resuelto por Alejandro Calancha (febrero 2015)

1. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$, $\vec{w}=(0,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ comprueba que no son linealmente independientes.

Si en un conjunto de vectores alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás, entonces el conjunto es linealmente dependiente. Esto implicaría que los vectores están ligados entre si.

Para demostrarlo, intentamos expresar uno de los vectores como combiación lineal de los otros dos:

$$(0,3)=a(1,1)+b(-1,2) \quad \rightarrow \quad (0,3)=(a-b\,,a+2\mathrm{b})$$

Igualando componentes obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0=a-b \\ 3=a+2b \end{pmatrix} \rightarrow \text{soluciones: } \quad a=1 \quad , \quad b=1$$

Como al menos uno de los dos factores es no nulo, podemos decir que el conjunto es linealmente dependiente.

Hoja 2. Problema 2

Resuelto por Pepe Navarro (febrero 2016)

2. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(2,-1)$, $\vec{v}=(-3,2)$, $\vec{w}=(1,0)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ son linealmente dependientes.

Aplicamos la definición de dependiencia lineal.

$$a(2,-1)+b(-3,2)+c(1,0)=(0,0)$$

Si esta relación admite soluciones distinta de la trivial $a=b=c=0$, los vectores serán linealmente dependientes.

$$(2a-3b+c,-a+2b)=(0,0)$$

Igualando componentes generamos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 2a-3b+c=0 \\ -a+2b=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sistema sobredeterminado} \rightarrow \text{Un parámetro libre} \rightarrow \quad c=\lambda$$

$$\begin{Bmatrix} 2a-3b=-\lambda \\ -a+2b=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 2a-3b=-\lambda \\ -2a+4b=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sumamos} \rightarrow \quad b=-\lambda$$

Y despejando de la segunda ecuación → $a=-2\lambda$

El parámetro libre λ puede tomar cualquier valor real, por lo tanto existen infinita soluciones compatibles con el sistema. Estamos ante vectores linealmente dependientes.

Hoja 2. Problema 3

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,1,1)$, $\vec{w}=(1,-1,1)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, demuestra que forman un sistema generador.

Los vectores forman un sistema generador si podemos expresar cualquier vector del espacio tridimensional como combinación lineal de ellos. Es decir:

$$(x,y,z)=a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,-1,1)$$

Obtenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a,b,c .

$$\left\{\begin{matrix} x=a+c \\ y=a+b-c \\ z=b+c \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \rightarrow F_2 \leftrightarrow F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & -1 & y \end{array}\right) \rightarrow F_3'=F_3-F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & -2 & y-x \end{array}\right) \rightarrow F_3'=F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & -3 & y-x-z \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $-3c=y-x-z \quad c=\frac{x-y+z}{3}$

De la segunda ecuación → $b+c=z \rightarrow b=z-\frac{x-y+z}{3} \rightarrow b=\frac{-x+y+2z}{3}$

De la primera ecuación → $a+c=x \rightarrow a=x-\frac{x-y+z}{3} \rightarrow a=\frac{2x+y-z}{3}$

Podemos expresar las tres incógnitas en función de las componentes del vector arbitrario (x,y,z) . Por lo tanto, los tres vectores forman un sistema generador.

Hoja 2. Problema 4

4. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(4,-2,m)$ sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si todos los coeficientes de la siguiente relación son nulos:

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \quad \rightarrow \quad a(1,-1,2)+b(2,0,1)+c(4,-2,m)=(0,0,0)$$

Igualando componentes obtenemos un vector de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} a+2b+4c=0 \\ -a-2c=0 \\ 2a+b+mc=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \leftrightarrow C_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F_3'=2F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2m-4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=F_3+3F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m-10 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación $\rightarrow$ $(2m-10)c=0 \rightarrow c=0$ si y solo si $2m-10\neq 0 \rightarrow m\neq 5$

Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes si la única solución posible es la arbitraria $a=0, b=0, c=0$. Y esto se cumple si el parámetro $m\neq 5$.