Problemas – Tema 4

Solución a problemas de vectores - Hoja 1 - Todos resueltos

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Javier Bermúdez (febrero 2015)

1. Expresa el vector $\vec{u}=(5,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,5)$, $\vec{w}=(2,-1)$.

Aplicamos la definición de combinación lineal:

$$(5,3)=a(1,5)+b(2,-1) \quad \rightarrow \quad (5,3)=(a+2\mathrm{b},5a-b)$$

Igualamos componentes:

$$\begin{Bmatrix} 5=a+2\mathrm{b} \\ 3=5a-b \end{Bmatrix} \rightarrow \text{soluciones:} \quad a=1 \quad , \quad b=2$$

Es decir, podemos expresar $\vec{u}=(5,3)$ en función de los otros dos vectores de la forma:

$$(5,3)=(1,5)+2(2,-1)$$

Hoja 1. Problema 2

Resuelto por Raquel Juárez (febrero 2016)

2. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ comprueba que son linealmente independientes y que cualquier vector $\vec{w}=(x,y)$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

En primer lugar comprobamos que ambos vectores son linealmente independientes.

$$a(1,1)+b(-1,2)=(0,0) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{cases} a-b=0 \\ a+2b=0 \end{cases}\right\} \quad \rightarrow \text{Solución única} \quad a=b=0$$

Son independientes. En segundo lugar buscamos si ambos vectores de partida pueden expresar, como combinación lineal, un vectro arbitrario en dos dimensiones (es decir, si son un sistema generador).

$$(x,y)=a(1,1)+b(-1,2) \quad \rightarrow \quad (x,y)=(a-b,a+2b)$$

Igualamos componentes y obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas a,b .

$$\left.\begin{cases} x=a-b \\ y=a+2\mathrm{b} \end{cases}\right\} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad x-y=-3b \quad \rightarrow \quad b=\frac{-x+y}{3}$$

Llevamos este valor a la primera ecuación.

$$x=a-b \quad \rightarrow \quad x=a-\frac{-x+y}{3} \quad \rightarrow \quad a=x+\frac{-x+y}{3} \quad \rightarrow \quad a=\frac{2x+y}{3}$$

Hemos expresado las incógnitas a,b en función de los parámetros del vector arbitrario (x,y) . Nuestros vectores de partida son un sistema generador.

$$(x,y)=\frac{2x+y}{3}(1,1)+\frac{-x+y}{3}(-1,2)$$

Hoja 1. Problema 3

Resuelto por Pablo Gallegos

3. ¿Forman $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}=(4,1,0)$ un sistema generador en $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$?

$$(x,y,z)=a(1,-1,0)+b(2,1,0)+c(4,1,0) \rightarrow (x,y,z)=(a+2b+4c,-a+b+c,0)$$

Igualando componentes obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (donde las incógnitas son a,b,c).

$$\left\{\begin{matrix} x=a+2b+4c \\ y=-a+b+c \\ z=0 \end{matrix}\right\}$$

De la tercera ecuación deducimos que los únicos vectores que pueden formar, por combinación lineal, el conjunto de vectores de partida, son aquellos con tercera componente nula: $z=0$.

Por lo tanto, los vectores de partida no son sistema generador por no poder expresar cualquier vector arbitrario en tres dimensiones.

Hoja 1. Problema 4

Resuelto por José Pedro Casado (enero 2016)

4. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$ **,** $\vec{v}=(2,0,1)$ **,** $\vec{w}=(-1,1,1)$ **del espacio vectorial** $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ **expresa el vector** $\vec{t}=(5,-3,-2)$ **como combinación lineal de los otros tres.**

$$(5,-3,-2)=a(1,-1,0)+b(2,0,1)+c(-1,1,1)$$

$$(5,-3,-2)=(a+2b-c,-a+c,b+c)$$

Igualamos componentes y formamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{c} 5=a+2b-c \\ -3=-a+c \\ -2=b+c \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación → $a=c+3$

De la tercera ecuación → $b=-c-2$

Sustituimos en la primera ecuación → $5=c+3+2(-c-2)-c$ → $5=-2c-1$ → $c=-3$

Por lo tanto → $a=0$, $b=1$

Es decir, la combinación lineal resulta → $(5,-3,-2)=0(1,-1,0)+(2,0,1)-3(-1,1,1)$

Hoja 1. Problema 5

5. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,0)$, demuestra que forman una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=(10,4,-3)$ en dicha base.

Tres vectores en el espacio tridimensional forman una base si son sistema generador y linealmente independientes.

Demostremos primero que forman un sistema generador, es decir, que cualquier vector del espacio tridimensional se puede representar como combinación lineal de los tres vectores de partida.

$$(x,y,z)=a(1,1,1)+b(2,0,1)+c(0,1,0)$$

Resultando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a,b,c .

$$\left\{\begin{array}{c} x=a+2b \\ y=a+c \\ z=a+b \end{array}\right\}$$

Si restamos la primera ecuación menos la tercera → $x-z=b$

Si multiplicamos la tercera ecuación por 2 y le restamos la primera → $2z-x=a$

Si sustituimos el valor de a en la segunda ecuación → $x+y-2z=c$

Hemos obtenido solución única de las tres incógnitas, en función de los valores del vector arbitrario (x,y,z) . Por lo tanto, los tres vectores de partida forman un sistema generador.

Serán linealmente independientes si hacen nulos todos los parámetros de la siguiente igualdad:

$$(0,0,0)=a(1,1,1)+b(2,0,1)+c(0,1,0)$$

Que da lugar al siguiente sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{c} 0=a+2b \\ 0=a+c \\ 0=a+b \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación → $a=-2b$

De la tercera ecuación → $a=-b$

Por lo tanto → $b=2b$ → $b=0$ → $a=0$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación → $c=0$

Es decir, los tres vectores son linealmente independientes.

Por lo tanto, forman una base por ser sistema generador y linealmente independientes.

Podemos expresar $\vec{w}=(10,4,-3)$ como combinación de los tres vectores, recordando las relaciones obtenidas como sistema generador:

$$2z-x=a$$
$$x-z=b$$
$$x+y-2z=c$$

Para $\vec{w}=(10,4,-3)$ → $x=10$, $y=4$, $z=-3$

Por lo tanto → $a=-16$, $b=13$, $c=20$

La coordenadas de $\vec{w}$ en la base → $(10,4,-3)=-16(1,1,1)+13(2,0,1)+20(0,1,0)$

Hoja 1. Problema 6

6. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,-1,0)$, $\vec{w}=(m,0,0)$ sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si al menos uno de los coeficientes de la siguiente igualdad es distinto de cero.

$$(0,0,0)=a(1,1,1)+b(2,-1,0)+c(m,0,0)$$

Generamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a,b,c

$$\begin{cases} a+2b+mc=0 \\ a-b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema homogéneo, ya que todos los términos independientes son nulos.

Si un sistema homogéneo tiene solución única, sería $a=0, b=0, c=0$, por lo que los vectores serían linealmente independientes. Si tiene infinitas soluciones, entonces al menos una de las incógnitas podría ser no nula, por lo que los vectores serían dependientes.

De la tercera ecuación → $a=0$ → Llevado a la segunda ecuación $b=0$

Sustituyendo estos resultados en la tercera ecuación → $mc=0$ → $c=0$ si y solo si el parámetro $m\neq 0$, ya que no podemos dividir por cero.

Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes si $m\neq 0$.

Hoja 1. Problema 7

7. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-2,5)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$, $\vec{w}=(-1,1,m)$ sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si al menos uno de los coeficientes de la siguiente igualdad es distinto de cero.

$$(0,0,0)=a(1,-2,5)+b(-2,3,1)+c(-1,1,m)$$

Geramos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a,b,c

$$\left\{\begin{matrix} a-2b-c=0 \\ -2a+3b+c=0 \\ 5a+b+mc=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=F_2+2F_1 \quad , \quad F_3'=F_3-5F_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & m+5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=F_3+11F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-6 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación $\rightarrow$ $(m-6)c=0$ $\rightarrow$ La solución $c=0$ es la única siempre y cuando $\rightarrow$ $m-6\neq 0$ $\rightarrow$ $m\neq 6$

Hoja 1. Problema 8

Resuelto por María Cristina Pérez Ramos

8. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,m,2)$, $\vec{w}=(3,1,m)$ sean linealmente independientes.

Planteamos la definición de independiencia lineal.

$$a(2,0,-1)+b(1,m,2)+c(3,1,m)=(0,0,0)$$

Los tres vectores de partia serán linealmente independientes si los coeficientes a,b,c tienen como sulución única 0 .

$$(2a+b+3c, 0+mb+c, -a+2b+mc)=(0,0,0)$$

Igualamos componentes y formamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 2a+b+3c=0 \\ mb+c=0 \\ -a+2b+mc=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{matriz ampliada} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ -1 & 2 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=2F_3+F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2m+3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=mF_3-5F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m^2+3m-5 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $(2m^2+3\text{m}-5)c=0$

Para obtener como solución única $c=0$ necesitamos que el factor $(2m^2+3m-5)\neq 0$. Si resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4} \rightarrow \text{Concluimos} \rightarrow m\neq 1,-\frac{5}{2}$$

El parámetro m puede tomar cualquier valor, salvo $m\neq 1,-\frac{5}{2}$, para garantizar que $c=0$ sea solución única de la incógnita.

Si $c=0$ de la segunda ecuación → $mb=0$ → ¿Podemos afirmar que si $m=0$ tendríamos la incógnita b con infinitas soluciones?

No... ¿por qué?

Si repasamos las transformaciones lineales que aplicamos por Gauss, en uno de los pasos planteamos:

$F_3'=mF_3-5F_2$ → si $m=0$ → $F_3'=-5F_2$

Y esta transformación no está permitida ya que estamos cambiando una fila por el valor de otra. Y esto inhabilita la conclusión de que si $m=0$ tendríamos infinitas soluciones.

Los únicaos valores que debemos evitar son $m\neq 1,-\frac{5}{2}$.