Teoría – Tema 4

Notación matricial en la resolución de sistemas de ecuaciones por Gauss

Índice de contenido

Matriz del sistema y matriz ampliada

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas cada una, forma un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+...+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+...+a_{2n}x_n=c_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+...+a_{3n}x_n=c_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+...+a_{mn}x_n=c_m \end{pmatrix}$$

El término a_{ij} es el coeficiente de la ecuación i que acompaña a la incógnita x_j . El número i de la ecuación se denomina **fila**, y el valor j de la incógnita x_j se denomina **columna**.

Para representar el **sistema en forma matricial** tomamos únicamente los coeficientes a_{ij} y los ordenamos en filas y columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Forma matricial del sistema}$$

Si incluimos en la representación matricial del sistema la columna de términos independientes c_i tendremos su **matriz ampliada**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & c_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & c_m \end{array}\right) \rightarrow \text{Matriz ampliada del sistema}$$

Método de Gauss

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales $m \times n$ consiste en aplicar repetidamente el método de reducción, hasta obtener un sistema escalonado o triangular equivalente.

Un **sistema triangular** es aquel que tiene nulos todos los coeficientes a_{ij} que se encuentran por debajo o por encima de la **diagonal principal** de la matriz del sistema. La diagonal principal está formada por los coeficientes a_{ii}, $i=1,2,\ldots,m$ (es decir, el número de la fila coincide con el número de la columna).

Por norma general, trabajaremos con sistemas 3×3 a lo largo de este curso de 1ºBachillerato.

¿Cómo podemos obtener el sistema triangular equivalente? Aplicando las **operaciones de transformación lineales**: permutar filas, permutar columnas, multiplicar una fila/columna por un número real no nulo, y sumar a una fila/columna el valor de otras filas/columnas multiplicadas por números reales no nulos.

Ejemplo

Resolver $\begin{Bmatrix} x-2y+4z=1 \\ 4x+y-z=-3 \\ 3x+y+2z=4 \end{Bmatrix}$

Matriz ampliada del sistema → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

A la segunda fila le restamos cuatro veces la primera → $F'_2=F_2-4\mathrm{F}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

A la tercera fila le restamos tres veces la primera fila → $F'_3=F_3-3\mathrm{F}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

La nueva tercera fila será el resultado de multiplicar por nueve la tercera fila y restarle la segunda multiplicada por siete → $F'_3=9\cdot F_3-7\cdot F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación podemos despejar la solución particular para z .

$29z=58 \rightarrow z=2$

Sustituimos en la segunda ecuación para obtener y .

$9y-17\cdot(2)=-7 \rightarrow y=3$

Y de la primera obtenemos x .

$x-2\cdot(3)+4\cdot(2)=1 \rightarrow x=-1$

Hemos obtenido una solución particular para cada una de las incógnitas. Nuestra solución general es la tupla $(x, y, z)=(-1,3,2)$.

Esta tupla solución es la única permitida para el sistema, por lo que estamos ante un sistema compatible determinado.

Solución única, ausencia de solución e infinitas soluciones en un sistema de ecuaciones

Si el sistema posee solución, hablamos de **sistema compatible**. Si no posee solución, es un **sistema incompatible**.

Si existe solución y es única, tendremos **sistema compatible determinado (S.C.D.)**. Si existen infinitas soluciones posibles, según el valor de un parámetro, hablaremos de **sistema compatible indeterminado (S.C.I.)**.

¿Cómo detectar, por el método de Gauss, que el sistema es incompatible (sin solución)? Si al obtener la matriz triangular equivalente a la matriz ampliada de partida, obtenemos una fila i con todos los términos nulos salvo el término independiente $c_i \neq 0$, tendremos un **absurdo matemático o incongruencia**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{33} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right)$$ → Si $c_3 \neq 0$ en la tercera ecuación → $0+0+0=c_3$ → Absurdo

Por lo tanto, si con nuestras operaciones de transformación obtenemos un sistema triangular equivalente donde **aparece un absurdo matemático**, diremos que el **sistema no tiene solución → sistema incompatible**.

Ejemplo

Resolver $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=4 \\ -x+2y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}$

Matriz ampliada del sistema 3×3 → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

En la tercera ecuación llegamos a la incongruencia $0=-4$ → no hay solución → sistema incompatible.

Si no obtenemos ningún absurdo matemático, el sistema siempre tendrá solución: será **compatible**.

Si, por ejemplo, en la fila i obtenemos una igualdad $0=0$, tendremos una ecuación que no aporta información nueva para obtener la solución del sistema. Y como no aporta información nueva, podremos desecharla en nuestras operaciones. Por cada fila que desechemos al llegar a una igualdad $0=0$ diremos que una incógnita se convierte en **parámetro libre** y nuestro sistema tendrá infinitas soluciones dependientes de ese parámetro libre (sistema compatible indeterminado).

Ejemplo

Resolver $\begin{Bmatrix} 3x-4y=2 \\ 12x-16y=8 \end{Bmatrix}$

Matriz ampliada del sistema 2×2 $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 12 & -16 & 8 \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

En la segunda ecuación llegamos a la igualdad $0=0$ $\rightarrow$ la segunda ecuación es combinación lineal de la primera $\rightarrow$ infinitas soluciones $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado. Cuando tenemos infinitas soluciones es común tomar una de las incógnitas como parámetro. Por ejemplo, si $y=\lambda$ $\rightarrow$ podemos expresar la incógnita x en función del parámetro $\rightarrow$ $3\mathrm{x}=2+4\cdot\lambda$ $\rightarrow$ $x=\frac{2+4\cdot\lambda}{3}$

En caso de tener llegar a una solución única para cada incógnita, estaremos ante un sistema compatible determinado (que son lo que hemos realizado, casi mayoritariamente, en Secundaria y en los primeros temas de 1ºBachillerato).