Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación de la primera evaluación - Hoja 9 - Todos resueltos

Hoja 9. Problema 1

1. Resuelve $\begin{Bmatrix} \log x+\log(y+3)=\log 6 \\ \log \dfrac{x+7}{y+2}=1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} \log x+\log(y+3)=\log 6 \\ \log \dfrac{x+7}{y+2}=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \log[x(y+3)]=\log 6 \\ \log \dfrac{x+7}{y+2}=\log(10) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x(y+3)=6 \\ \dfrac{x+7}{y+2}=10 \end{Bmatrix}$$

De la primera ecuación → $x=\dfrac{6}{y+3}$ → Sustituimos en la segunda ecuación del sistema.

$$\frac{\frac{6}{y+3}+7}{y+2}=10 \rightarrow \frac{6+7y+21}{y+3}=10y+20 \rightarrow 7y+27=(10y+20)(y+3)$$

$$7y+27=10y^2+30y+20y+60 \rightarrow 10y^2+43y+33=0$$

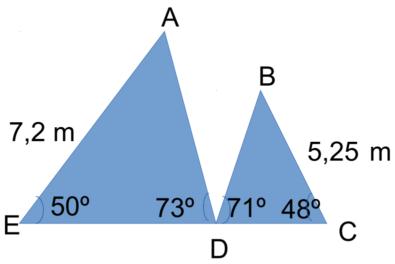
$$y=\frac{-43\pm\sqrt{43^2-4\cdot 10\cdot 33}}{2\cdot 10}=\frac{-43\pm 23}{20} \rightarrow y=\frac{-33}{10} \quad , \quad y=-1$$

La solución $y=\dfrac{-33}{10}$ no es posible, ya que hace negativo el argumento de $\log(y+3)$.

Si $y=-1$, $x=\dfrac{6}{y+3}$ → $x=3$

Hoja 9. Problema 2

2. Calcula la distancia entre los puntos A y B.



En el triángulo DAB se cumple → $\hat{D}=180º-73º-71º$ → $\hat{D}=36º$

Si obtenemos las distancias $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$, podríamos aplicar el teorema del coseno para conseguir la distancia $\overline{AB}$ que nos pide el enunciado.

En el triángulo DAE , por el teorema del seno:

$$\frac{7{,}2}{sen(73º)}=\frac{\overline{DA}}{sen(50º)} \rightarrow \overline{DA}=5{,}77\,m$$

En el triángulo DBC , por el teorema del seno:

$$\frac{5{,}25}{sen(71º)}=\frac{\overline{DB}}{sen(48º)} \rightarrow \overline{DB}=4{,}13\,m$$

En el triángulo DAB , por el teorema del coseno:

$$(\overline{AB})^2=(5{,}77)^2+(4{,}13)^2-2\cdot 5{,}77\cdot 4{,}13\cdot\cos(36º)$$

$$(\overline{AB})^2=33{,}29+17{,}06-47{,}66\cdot\cos(36º)$$

$$(\overline{AB})^2=11{,}79$$

$$\overline{AB}=3{,}43\,m$$

Hoja 9. Problema 3

3. El producto de dos números complejos es $4i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro resulta $\frac{1}{4}$. Halla los módulos y los argumentos de ambos complejos de partida.

Los dos números complejos, en forma polar, son:

$$z_1 = |z_1|_\alpha \quad , \quad z_2 = |z_2|_\beta$$

El valor imaginario puro $4i$ en forma polar es 4_{90^o} . Las condiciones a cumplir son:

$$|z_1| \cdot |z_2| = 4$$
$$\alpha + \beta = 90^o$$

El valor real $\frac{1}{4}$ en forma polar es $\left(\frac{1}{4}\right)_{0^o}$. Las condiciones a cumplir son:

$$\frac{|z_1|^3}{|z_2|} = \frac{1}{4}$$
$$3 \cdot \alpha - \beta = 0^o$$

Podemos formar dos sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas cada uno.

El primer sistema implica a las fases.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^o \\ 3\alpha - \beta = 0^o \end{array} \right\}$$

De la segunda ecuación $\beta = 3\alpha$ → Sustituimos en la primera → $4\alpha = 90^o$

Por lo tanto → $\alpha = 22{,}5^o$ y $\beta = 67{,}5^o$

El segundo sistema implica a los módulos.

$$\left\{\begin{array}{c} |z_1|\cdot|z_2|=4 \\ \dfrac{|z_1|^3}{|z_2|}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación → $|z_2|=\dfrac{4}{|z_1|}$ → Sustituimos en la segunda → $\dfrac{|z_1|^3}{\dfrac{4}{|z_1|}}=\dfrac{1}{4}$ →

$|z_1|^4=1$ → $|z_1|=1$ → Tomamos solución positiva porque el módulo, por definición, es una cantidad positiva.

Por lo tanto → $|z_2|=4$

La solución final resulta:

$$z_1=1_{22,5^\circ} \quad , \quad z_2=4_{67,5^\circ}$$

Donde podemos sumar, a cada fase, el número de vueltas completas de 360º que queramos.

Hoja 9. Problema 4

4. Resuelve.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z+t=4 \\ -x+\frac{3}{2}y+z+t=0 \\ y+z+t=1 \\ 4x+t=5 \end{array}\right\}$$

Vamos a resolver este sistema 4x4 por Gauss, recordando que donde no aparezca una incógnita implica un coeficiente nulo.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=2F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=F_2+F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=4F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow F_4'=F_4-2F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow F_4'=2F_4+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow F_4'=F_4+F_3 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$ → De la cuarta ecuación → $2t=-2 \rightarrow t=-1$

De la tercera ecuación → $z+t=0 \;,\; t=-1 \rightarrow z=1$

De la segunda ecuación → $4y+3z+3t=4 \;,\; t=-1 \;,\; z=1 \rightarrow y=1$

De la primera ecuación → $2x+y+z+t=4 \;,\; y=1 \;,\; z=1 \;,\; t=-1 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Hoja 9. Problema 5

5. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{Bmatrix} x+2y-1\geqslant 0 \\ x-3y-6<0 \\ x+y\leq 5 \end{Bmatrix}$$

Representamos la recta asociada a cada inecuación.

$x+2y-1\geq 0 \;\rightarrow\; x+2y-1=0 \;\rightarrow$ Puntos $(1,0)$, $(3,1)$

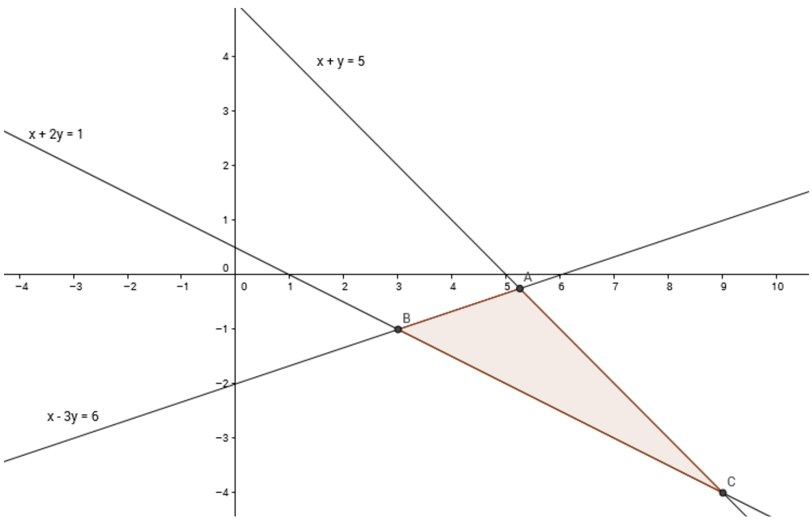
La zona del plano que contiene a $(5,0)$ cumple la desigualdad.

$x-3y-6<0 \;\rightarrow\; x-3y-6=0 \;\rightarrow$ Puntos $(0,-2)$, $(3,-1)$

La zona del plano que contiene a $(0,0)$ cumple la desigualdad.

$x+y\leq 5 \;\rightarrow\; x+y=5 \;\rightarrow$ Puntos $(0,5)$, $(5,0)$

La zona del plano que contiene a $(0,0)$ cumple la desigualdad.



El punto A se obtiene como intersección de las rectas que forman el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{matrix} x+y=5 \\ x-3y=6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow \quad 4y=-1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{-1}{4} \quad \rightarrow \quad x=\frac{21}{4}$$

El punto B se obtiene como intersección de:

$$\left\{\begin{matrix} x+2y=1 \\ x-3y=6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow \quad 5y=-5 \quad \rightarrow \quad y=-1 \quad \rightarrow \quad x=3$$

El punto C se obtiene como intersección de:

$$\left\{\begin{matrix} x+2y=1 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow \quad y=-4 \quad \rightarrow \quad x=9$$

El segmento $\overline{CB}$ es solución del sistema de inecuaciones de partida, salvo en el punto $B(-1,3)$.

El segmento $\overline{CA}$ es solución del sistema de inecuaciones de partida, salvo en el punto $A(\frac{-1}{4},\frac{21}{4})$.

El segmento $\overline{AB}$ no es solución, al pertenecer a la recta $x-3y-6=0$, que está asociada a una desigualdad que no contiene al signo igual.

Hoja 9. Problema 6

6. Resuelve $sen^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Desarrollamos → $sen^4 x = (sen^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x$

Sustituimos en la ecuación de partida.

$$1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - 2\cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -2\cos^2 x = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$

Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$, $x = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$

Si $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$, $x = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$

Podemos agrupar las cuatro soluciones → $x = 60^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{R}$, $x = 120^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{R}$

Hoja 9. Problema 7

7. Demuestra que para el complejo $z=\cos x-i\cdot sen\,x$ **se verifica** $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$ **. Si** $x=45^{\circ}$ **, halla las raíces cúbicas del complejo** z **.**

$z=\cos x-i\cdot sen\,x$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x-i\cdot sen\,x}$ → Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x-i\cdot sen\,x}\cdot\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos x+i\cdot sen\,x}$ → $\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos^2 x-i^2\cdot sen^2 x}$ → $\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos^2 x+sen^2 x}$

$\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{1}$ → $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$ → Como queríamos demostrar.

Donde hemos utilizado la relación fundametal de trigonometría → $\cos^2 x+sen^2 x=1$

Si $x=45^{\circ}$ → $z=\cos 45^{\circ}-i\cdot sen\,45^{\circ}$ → $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

En formato polar → $z=1_{315^{\circ}}$

Calculamos la raíz cúbica de este complejo, obteniendo tres soluciones de igual módulo, pero con fases diferenciándose en 120º.

$$\sqrt[3]{z}=1_{\frac{315^{\circ}+360^{\circ}k}{3},\,k=0,1,2} \rightarrow \sqrt[3]{z}=1_{105^{\circ}} \quad , \quad \sqrt[3]{z}=1_{225^{\circ}} \quad , \quad \sqrt[3]{z}=1_{345^{\circ}}$$

Recordando que, en cada fase, podemos sumar el número de vueltas completas de 360º que deseemos.