

## Problemas – Tema 4

# Solución a problemas de Repaso y Ampliación de la primera evaluación - Hoja 9 - Todos resueltos

### Hoja 9. Problema 1

1. Resuelve 
$$\begin{cases} \log x + \log(y+3) = \log 6 \\ \log \frac{x+7}{y+2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + \log(y+3) = \log 6 \\ \log \frac{x+7}{y+2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log [x(y+3)] = \log 6 \\ \log \frac{x+7}{y+2} = \log(10) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(y+3) = 6 \\ \frac{x+7}{y+2} = 10 \end{cases}$$

De la primera ecuación  $\rightarrow x = \frac{6}{y+3}$   $\rightarrow$  Sustituimos en la segunda ecuación del sistema.

$$\frac{\frac{6}{y+3} + 7}{y+2} = 10 \rightarrow \frac{6 + 7y + 21}{y+3} = 10y + 20 \rightarrow 7y + 27 = (10y + 20)(y + 3)$$

$$7y + 27 = 10y^2 + 30y + 20y + 60 \rightarrow 10y^2 + 43y + 33 = 0$$

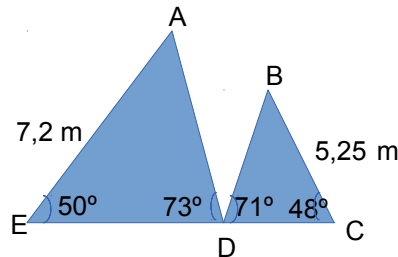
$$y = \frac{-43 \pm \sqrt{43^2 - 4 \cdot 10 \cdot 33}}{2 \cdot 10} = \frac{-43 \pm 23}{20} \rightarrow y = \frac{-33}{10}, y = -1$$

La solución  $y = \frac{-33}{10}$  no es posible, ya que hace negativo el argumento de  $\log(y+3)$ .

Si  $y = -1$ ,  $x = \frac{6}{y+3} \rightarrow x = 3$

## Hoja 9. Problema 2

### 2. Calcula la distancia entre los puntos A y B.



En el triángulo  $DAB$  se cumple  $\rightarrow \hat{D} = 180^\circ - 73^\circ - 71^\circ \rightarrow \hat{D} = 36^\circ$

Si obtenemos las distancias  $\overline{DA}$  y  $\overline{DB}$ , podríamos aplicar el teorema del coseno para conseguir la distancia  $\overline{AB}$  que nos pide el enunciado.

En el triángulo  $DAE$ , por el teorema del seno:

$$\frac{7,2}{\text{sen}(73^\circ)} = \frac{\overline{DA}}{\text{sen}(50^\circ)} \rightarrow \overline{DA} = 5,77 \text{ m}$$

En el triángulo  $DBC$ , por el teorema del seno:

$$\frac{5,25}{\text{sen}(71^\circ)} = \frac{\overline{DB}}{\text{sen}(48^\circ)} \rightarrow \overline{DB} = 4,13 \text{ m}$$

En el triángulo  $DAB$ , por el teorema del coseno:

$$(\overline{AB})^2 = (5,77)^2 + (4,13)^2 - 2 \cdot 5,77 \cdot 4,13 \cdot \cos(36^\circ)$$

$$(\overline{AB})^2 = 33,29 + 17,06 - 47,66 \cdot \cos(36^\circ)$$

$$(\overline{AB})^2 = 11,79$$

$$\overline{AB} = 3,43 \text{ m}$$

## Hoja 9. Problema 3

3. El producto de dos números complejos es  $4i$ , y el cubo de uno de ellos dividido por el otro resulta  $\frac{1}{4}$ . Halla los módulos y los argumentos de ambos complejos de partida.

Los dos números complejos, en forma polar, son:

$$z_1 = |z_1|_{\alpha}, \quad z_2 = |z_2|_{\beta}$$

El valor imaginario puro  $4i$  en forma polar es  $4_{90^\circ}$ . Las condiciones a cumplir son:

$$|z_1| \cdot |z_2| = 4$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

El valor real  $\frac{1}{4}$  en forma polar es  $\left(\frac{1}{4}\right)_{0^\circ}$ . Las condiciones a cumplir son:

$$\frac{|z_1|^3}{|z_2|} = \frac{1}{4}$$

$$3 \cdot \alpha - \beta = 0^\circ$$

Podemos formar dos sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas cada uno.

El primer sistema implica a las fases.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ \end{cases}$$

De la segunda ecuación  $\beta = 3\alpha \rightarrow$  Sustituimos en la primera  $\rightarrow 4\alpha = 90^\circ$

Por lo tanto  $\rightarrow \alpha = 22,5^\circ$  y  $\beta = 67,5^\circ$

El segundo sistema implica a los módulos.

$$\begin{cases} |z_1| \cdot |z_2| = 4 \\ \frac{|z_1|^3}{|z_2|} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

De la primera ecuación  $\rightarrow |z_2| = \frac{4}{|z_1|} \rightarrow$  Sustituimos en la segunda  $\rightarrow \frac{|z_1|^3}{\frac{4}{|z_1|}} = \frac{1}{4} \rightarrow$

$|z_1|^4 = 1 \rightarrow |z_1| = 1 \rightarrow$  Tomamos solución positiva porque el módulo, por definición, es una cantidad positiva.

Por lo tanto  $\rightarrow |z_2| = 4$

La solución final resulta:

$$z_1 = 1_{22,5^\circ} \quad , \quad z_2 = 4_{67,5^\circ}$$

Donde podemos sumar, a cada fase, el número de vueltas completas de  $360^\circ$  que queramos.

## Hoja 9. Problema 4

### 4. Resuelve.

$$\begin{cases} 2x+y+z+t=4 \\ -x+\frac{3}{2}y+z+t=0 \\ y+z+t=1 \\ 4x+t=5 \end{cases}$$

Vamos a resolver este sistema 4x4 por Gauss, recordando que donde no aparezca una incógnita implica un coeficiente nulo.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow F_2' = 2F_2 \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow F_2' = F_2 + F_1 \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow F_3' = 4F_3 - F_2 \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow F_4' = F_4 - 2F_1 \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow F_4' = 2F_4 + F_2 \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow F_4' = F_4 + F_3 \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \text{De la cuarta ecuación} \rightarrow 2t = -2 \rightarrow t = -1$$

De la tercera ecuación  $\rightarrow z+t=0$  ,  $t=-1 \rightarrow z=1$

De la segunda ecuación  $\rightarrow 4y+3z+3t=4$  ,  $t=-1$  ,  $z=1 \rightarrow y=1$

De la primera ecuación  $\rightarrow 2x+y+z+t=4$  ,  $y=1$  ,  $z=1$  ,  $t=-1 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

## Hoja 9. Problema 5

5. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{cases} x+2y-1 \geq 0 \\ x-3y-6 < 0 \\ x+y \leq 5 \end{cases}$$

Representamos la recta asociada a cada inecuación.

$$x+2y-1 \geq 0 \rightarrow x+2y-1=0 \rightarrow \text{Puntos } (1,0) , (3,1)$$

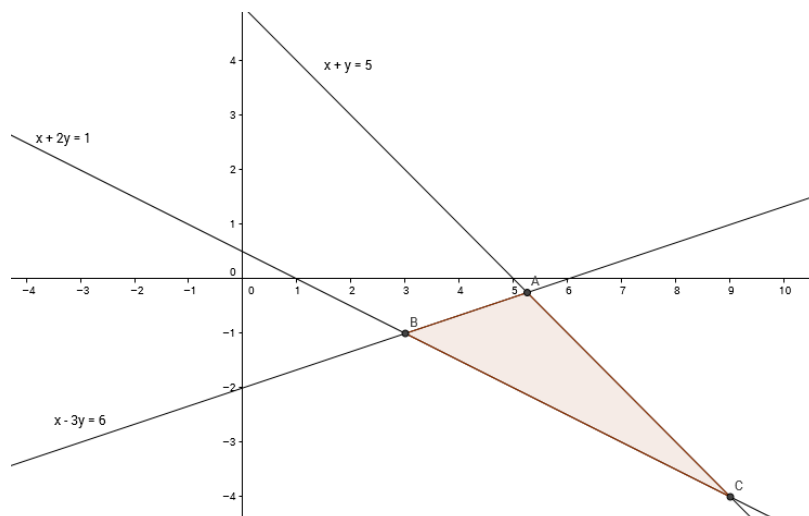
La zona del plano que contiene a  $(5,0)$  cumple la desigualdad.

$$x-3y-6 < 0 \rightarrow x-3y-6=0 \rightarrow \text{Puntos } (0,-2) , (3,-1)$$

La zona del plano que contiene a  $(0,0)$  cumple la desigualdad.

$$x+y \leq 5 \rightarrow x+y=5 \rightarrow \text{Puntos } (0,5) , (5,0)$$

La zona del plano que contiene a  $(0,0)$  cumple la desigualdad.



El punto A se obtiene como intersección de las rectas que forman el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-3y=6 \end{cases} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow 4y=-1 \rightarrow y=\frac{-1}{4} \rightarrow x=\frac{21}{4}$$

El punto B se obtiene como intersección de:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x-3y=6 \end{cases} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow 5y=-5 \rightarrow y=-1 \rightarrow x=3$$

El punto C se obtiene como intersección de:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=5 \end{cases} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow y=-4 \rightarrow x=9$$

El segmento  $\overline{CB}$  es solución del sistema de inecuaciones de partida, salvo en el punto  $B(-1,3)$ .

El segmento  $\overline{CA}$  es solución del sistema de inecuaciones de partida, salvo en el punto  $A\left(\frac{-1}{4}, \frac{21}{4}\right)$ .

El segmento  $\overline{AB}$  no es solución, al pertenecer a la recta  $x-3y-6=0$ , que está asociada a una desigualdad que no contiene al signo igual.

## Hoja 9. Problema 6

6. Resuelve  $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ .

Desarrollamos  $\rightarrow \operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 + \cos^4 x - 2 \cos^2 x$

Sustituimos en la ecuación de partida.

$$1 + \cos^4 x - 2 \cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \rightarrow 1 - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow -2 \cos^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{2}$$

Si  $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$ ,  $x = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$

Si  $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$ ,  $x = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$

Podemos agrupar las cuatro soluciones  $\rightarrow x = 60^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{R}$ ,  $x = 120^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{R}$



## Hoja 9. Problema 7

7. Demuestra que para el complejo  $z = \cos x - i \cdot \operatorname{sen} x$  se verifica  $\frac{1}{z} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$ . Si  $x = 45^\circ$ , halla las raíces cúbicas del complejo  $z$ .

$$z = \cos x - i \cdot \operatorname{sen} x$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos x - i \cdot \operatorname{sen} x} \rightarrow \text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos x - i \cdot \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x} \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x - i^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x} \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x}{1} \rightarrow \frac{1}{z} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \rightarrow \text{Como queríamos demostrar.}$$

Donde hemos utilizado la relación fundamental de trigonometría  $\rightarrow \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$$\text{Si } x = 45^\circ \rightarrow z = \cos 45^\circ - i \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En formato polar  $\rightarrow z = 1_{315^\circ}$

Calculamos la raíz cúbica de este complejo, obteniendo tres soluciones de igual módulo, pero con fases diferenciándose en  $120^\circ$ .

$$\sqrt[3]{z} = 1_{\frac{315^\circ + 360^\circ k}{3}, k=0,1,2} \rightarrow \sqrt[3]{z} = 1_{105^\circ}, \sqrt[3]{z} = 1_{225^\circ}, \sqrt[3]{z} = 1_{345^\circ}$$

Recordando que, en cada fase, podemos sumar el número de vueltas completas de  $360^\circ$  que deseemos.