



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS

Tema 11

Números factoriales. Números combinatorios. Binomio de Newton

Índice

1. Números factoriales	1
2. Números combinatorios	1
3. Binomio de newton	2
4. Ejercicios propuestos	3

1. Números factoriales

Se llama **factorial** de un número $n \in \mathbb{N}$ al producto de los n factores consecutivos que comienzan por la unidad y terminan por n , esto es,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Ejemplo 1.1

$$1! = 1, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Por convenio se ha establecido que, aunque $0 \notin \mathbb{N}$ y por definición $0!$ no tenga sentido, $0! = 1$.

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces siempre podremos hacer $n! = (n-1)!n$, ya que

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot n.$$

Ejemplo 1.2

 $6! = 5!6, \quad 9! = 7!8 \cdot 9.$

2. Números combinatorios

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se define el **número combinatorio** o **coeficiente binómico** al número

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!},$$

y se leerá m **sobre** n .

Con esta notación, se definen los siguientes números combinatorios:

$$\begin{aligned} \binom{m}{0} &= \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{0!m!} = 1, & \binom{0}{0} &= \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1} = 1, \\ \binom{m}{1} &= \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{(m-1)!m}{1!(m-1)!} = m. \end{aligned}$$

Las propiedades fundamentales de los números combinatorios se recogen en la siguiente

Proposición 2.1 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se satisfacen:*

$$1) \quad \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$$

$$2) \quad \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}.$$

Ejemplo 2.1 $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}, \quad \binom{100}{98} = \binom{100}{2}, \quad \binom{x}{x-3} = \binom{x}{3}.$

Ejemplo 2.2

$$\begin{aligned} \binom{8}{4} + \binom{8}{5} &= \binom{9}{5}, & \binom{x}{4} + \binom{x}{5} &= \binom{x+1}{5}, \\ \binom{12}{x} + \binom{12}{x+1} &= \binom{13}{x+1}, & \binom{15}{x-1} + \binom{15}{x} &= \binom{16}{x}. \end{aligned}$$

$$2) (x - y)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 - \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 = x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$$

$$3) (2x + y^2)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4y^2 + \binom{5}{2}(2x)^3(y^2)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(y^2)^3 + \binom{5}{4}2x(y^2)^4 + \binom{5}{5}(y^2)^5 = 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}.$$

Propiedades

1) El *término general* del desarrollo binómico $(x + a)^n$ viene dado por

$$\binom{n}{k}x^{n-k}a^k;$$

si escribimos $n - k$ en lugar de k obtenemos

$$\binom{n}{n-k}x^k a^{n-k}.$$

Obsérvese que los dos términos equidistantes de los extremos del desarrollo tienen coeficientes iguales ya que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2) Los coeficientes binómicos del desarrollo $(x + a)^n$ son

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n},$$

es decir, coinciden con los números de fila n -ésima del triángulo de Tartaglia.

3) La suma de los coeficientes del desarrollo de la potencia n -ésima de un binomio es igual a 2^n .

En efecto, si en el binomio hacemos $x = a = 1$ tenemos que

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}.$$

4) La suma de los coeficientes que ocupan el lugar par es igual a la suma de los que ocupan el lugar impar.

Así es; si hacemos $x = 1$ y $a = -1$ entonces

$$0^n = (1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$$

4. Ejercicios propuestos

(1) Comprueba que

$$(n - 1)! = n! - (n - 1)(n - 1)!, \quad (n + 1)! - n! = (n!)^2 : (n - 1)!.$$

(2) Halla el valor de x sabiendo que $x! = 110(x - 2)!$.

(3) Halla el valor de x en $12x! + 5(x + 1)! = (x + 2)!$.

(4) Comprueba que

a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$,

b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2$,

c) $n\binom{m}{n} = m\binom{m-1}{n-1}$.

(5) Halla m sabiendo que $\binom{m}{3} : \binom{m-1}{4} = \frac{8}{5}$.

(6) Calcula m sabiendo que $\binom{m}{6} = \binom{m}{3}$.

(7) Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\binom{x}{3} = \binom{x}{2}$, $\binom{x}{3} = x - 2$;

b) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = x + 1$, $7\binom{x}{4} = \binom{x+2}{4}$;

c) $2\binom{x}{4} = 2\binom{x}{3} - \binom{x}{2}$, $\binom{x}{5} = \frac{2}{3}\binom{x}{6}$;

d) $5\binom{2x}{x} = \binom{2x-2}{x-1}$, $18\binom{x}{2} + 24\binom{x}{3} = 125x$.

(8) Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(x - 1)^6$, $(2 - x)^6$, $(x - y)^6$;

b) $(x + 1)^8$, $(a^2 + y)^7$, $(2 + a)^9$;

c) $\left(3 - \frac{1}{3}b\right)^5$, $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^7$, $(3a^2b - 2b^2c)^8$.

(9) Halla el cuarto término del desarrollo de $(1 - x)^{10}$.

(10) Busca el octavo término del desarrollo de $(3a^2b - 2a)^{11}$.

(11) Halla el término medio del desarrollo de $(\sqrt{2} - 3\sqrt{ab^2})^{14}$.

(12) Escribe el término que contiene x^8 en el desarrollo de $(3x^3 - 2xy)^6$.

(13) Escribe el término que contiene x^{31} en el desarrollo de $\left(\frac{2x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{20}$.