Teoría – Tema 3

Complejos - Definición y propiedades

Índice de contenido

Definición de unidad imaginaria

Ante la imposibilidad de efectuar raíces de índice par y radicando negativo, aparecen los números complejos $\mathbb{C}$. El elemento característico de los complejos es la unidad imaginaria i , definida:

$i=\sqrt{-1}$ ==> $i^2=-1$

El cuadrado de la unidad imaginaria es igual a *-1*.

Con esta unidad imaginaria podemos resolver ecuaciones cuyas soluciones no existen en el cuerpo de los números reales.

Ejemplo

$$x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2} \rightarrow x=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3\cdot(-1)}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2}$$

Si $i=\sqrt{-1} \rightarrow x_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$, $x_2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

Las dos soluciones pertenecen a los números complejos, por aparecer la unidad imaginaria *i*.

La parte que va multiplicada a la unidad imaginaria i se llama parte imaginaria del número, y la parte que no va multiplicada a i es la parte real del número complejo.

Con ayuda de i podemos construir números no reales, que llamaremos números complejos.

Ejemplo

$x=5\in\mathbb{R} \rightarrow 5=5+0\cdot i$ → Un número real es un complejo sin unidad imaginaria.

$i=0+i$ → La unidad imaginaria i es un número complejo sin componente real.

$z=-1-\sqrt{3}\cdot i$ → Su parte real vale -1 y su parte imaginaria $-\sqrt{3}$.

Los números complejos que no poseen parte real se llaman **imaginarios puros**.

Ejemplo

Muestra de números imaginarios puros (complejos sin parte real).

$i=0+i$

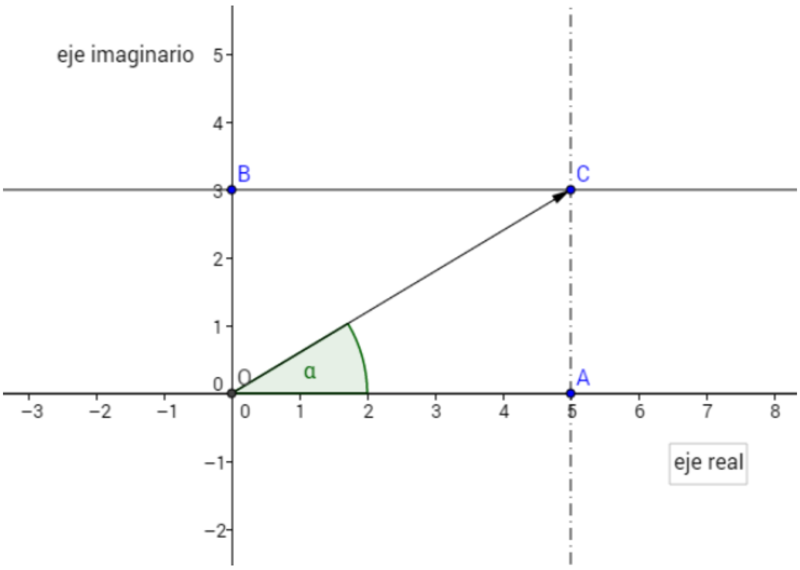
$2\cdot i=0+2\cdot i$

$-5\cdot i=0-5\cdot i$

$(\frac{2+\sqrt{7}}{3})\cdot i=0+(\frac{2+\sqrt{7}}{3})\cdot i$

Vamos a representar los números complejos en dos ejes cartesianos. El eje horizontal pasará a llamarse **eje real** y el eje vertical será el **eje imaginario**. Ambos forman el **plano complejo**.

Como su propio nombre indica, en el eje real representaremos números reales (complejos sin parte imaginaria) y en el eje imaginario representaremos números imaginarios puros (complejos sin parte real). En los cuatro cuadrantes tendremos números complejos con parte real y con parte imaginaria distinta de cero.



En la gráfica superior el punto $A(5,0)=5$ indica un número real, el punto $B(0,3)=3\cdot i$ indica un imaginario puro, y $C(5,3)=5+3\cdot i$ un número complejo con parte real y parte imaginaria no nulas.

Desarrollo formal del cuerpo conmutativo de los números complejos, con las operaciones internas suma y producto

Sea la pareja de valores (a,b) . Cada valor pertenece a los reales: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. El valor complejo $z=a+b \cdot i$ vamos a representarlo como la pareja de valores (a,b) .

Los números complejos son el **conjunto de los pares de valores** (a,b) **representados en el plano complejo**: $\mathbb{C}=\{(a,b)/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

También podemos expresar $\mathbb{C}$ como un producto cartesiano: $\mathbb{C}=\{(a,b) \in \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R}\}$.

El primer elemento del par de valores (a,b) se denomina **parte real**. Y el segundo es la **parte imaginaria**. El par de valores (a,b) también se conoce como **afijo**.

$$\begin{matrix} (a,b) \in \mathbb{C} \\ a \equiv parte\ real \\ b \equiv parte\ imaginaria \end{matrix}$$ → **Afijo de un número complejo**.

Suele reservarse la letra z para representar números complejos: $z=(a,b)=a+b \cdot i$

El opuesto a z sería $-z=(-a,-b)=-a-b \cdot i$.

Si multiplicamos un número complejo por un número real tendremos un nuevo número complejo que resulta de multiplicar el número real por cada uno de lo valores del afijo. Por ejemplo: $7 \cdot z=(7 \cdot a, 7 \cdot b)=7 \cdot a+7 \cdot b \cdot i$

$z=(a,b)$ → Representación de un número complejo como **pareja de valores (afijo)**.

$z=a+b \cdot i$ → **Notación binómica** para un número complejo,

Vamos a desarrollar formalmente la suma y producto de números complejos. En primer lugar lo haremos con la notación de pareja de valores, y lo relacionaremos en un segundo momento con la notación binómica.

Suma de complejos

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

La suma da como resultado **un nuevo número complejo cuya parte real es suma de las partes reales de los sumandos, y la parte imaginaria es suma de de las partes imaginarias de los sumandos**.

Como la suma genera un nuevo número complejo, se dice que la suma de complejos es una operación interna. Además, se definen las siguientes propiedades para la suma:

Propiedades de la suma de complejos

Conmutativa → $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

Asociativa → $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

Elemento neutro $(0,0)$ → $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$

Elemento simétrico $(-a,-b)$ (opuesto) → $(a,b)+(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0,0)$

Para practicar...

Partiendo de la definición de la suma de complejos, demuestra la propiedad conmutativa y asociativa.

Producto de complejos

$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d\,,\,a\cdot d+b\cdot c)$

La "peculiar" forma del producto de complejos es consecuencia directa de la definición de la unidad imaginaria $i^2=-1$. Usando la notación binómica:

$$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd\cdot i^2=ac+(ad+bc)\cdot i-bd=ac-bd+(ad+bc)\cdot i$$

Al multiplicar obtenemos un nuevo complejo con parte real $ac-bd$ y parte imaginaria $ad+bc$. El producto también es una operación interna de los números complejos que cumple las siguientes propiedades:

Propiedades del producto de complejos

Conmutativa → $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$

Asociativa → $[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$

Elemento neutro $(1,0)$ → $(a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 1)=(a,b)$

Elemento simétrico $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ (inverso) → $(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$

Distributiva respecto de la suma → $(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$

La forma del elemento simétrico del producto se obtiene de realizar el inverso de $z=(a,b)$. Es decir:

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\cdot i}$$

¿Cómo podemos operar con el inverso? Si definimos el **conjugado de un número complejo** $z=a+bi$ como $\bar{z}=a-bi$, podemos operar en la expresión anterior multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador.

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\cdot i}=\frac{a-b\cdot i}{(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i)}=\frac{a-b\cdot i}{a^2-b^2\cdot i^2}=\frac{a-b\cdot i}{a^2+b^2}$$

Obteniendo un nuevo complejo de parte real $\frac{a}{a^2+b^2}$ y parte imaginaria $\frac{-b}{a^2+b^2}$, que será el inverso de z .

Para practicar...

Partiendo de la definición del producto de complejos, demuestra la propiedad conmutativa, asociativa y distributiva del producto respecto de la suma.

Los números complejos $\mathbb{C}$ junto a las dos operaciones internas suma y producto $(\mathbb{C},+,\cdot)$, tienen estructura matemática de **Cuerpo conmutativo** (al igual que los números reales $\mathbb{R}$).

Repaso de conceptos

Los números complejos que tienen su parte imaginaria nula son números reales:

$si\ b=0 \ \rightarrow \ (a,0)=a \equiv número\ real$ → Se representan en el eje real horizontal.

Los números complejos que tienen su parte real nula se denominan imaginarios puros:

$si\ a=0 \ \rightarrow \ (0,b) \equiv imaginario\ \ puro$ → Se representan en el eje vertical imaginario.

La unidad imaginara $i=\sqrt{-1}$ vamos a representarla como un número complejo imaginario puro, de tal forma que:

$$i=(0,1) \ \rightarrow \ i^2=i \cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$$

Si mutiplicamos cualquier número real por la unidad imaginaria, obtenemos un número complejo imaginario puro:

$$\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ (x,0)\cdot i=x \cdot i \\ (x,0)\cdot(0,1)=(0,x) \end{matrix} \ \rightarrow \ (0,x)=x \cdot i$$ → Complejo imaginario puro.

Un número complejo arbitrario podemos desarrollarlo en su forma binómica:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\cdot i$$

Es decir, el afijo $z=(a,b)$ puede expresarse como **suma de una parte real y una parte imaginaria pura** (recordando multiplicar la parte imaginaria pura por *i* en la forma binómica).

Ejemplo

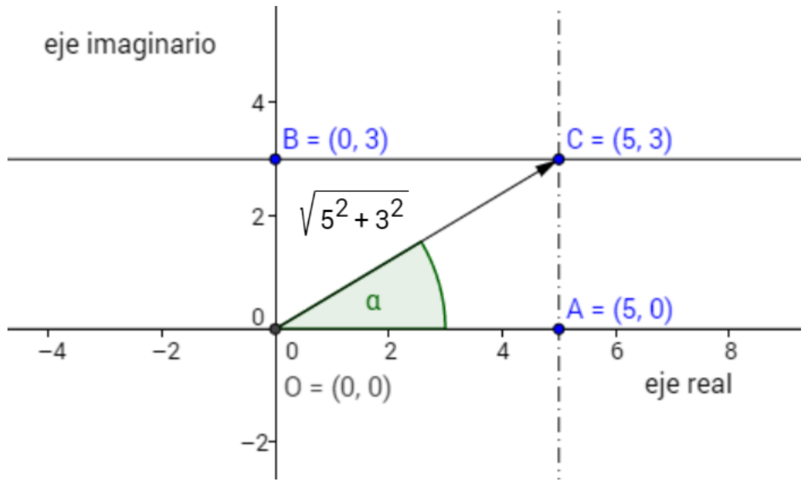
$z=(5,0)=5+0\cdot i$ → Número real expresado como complejo.

$z=(0,-8)=0+(-8\mathrm{i})=0-8\mathrm{i}$ → Número imaginario puro.

$z=(5,3)=5+3\mathrm{i}$ → Número complejo con parte real e imaginaria no nulas.

Representación gráfica. Módulo y fase de un número complejo

El módulo de un número complejo $z=(a,b)=a+b\cdot i$ es la longitud del vector con inicio el origen de coordenadas $O(0,0)$ y fin el punto que representa $z=(a,b)$ en el plano complejo.



De la gráfica deducimos fácilmente la longitud del vector $\overrightarrow{OC}$ aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *OAC*. Para un número complejo $z=(a,b)=a+b\cdot i$ calculamos el módulo del vector como la hipotenusa de ese triángulo:

Módulo de un número complejo $z=(a,b)$

$$\textit{módulo de un número complejo} \equiv |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Es decir, **el módulo de un número complejo siempre es una cantidad real y positiva**, que coincide con la longitud del vector $\overrightarrow{OC}$ representando en el plano complejo. No tienen sentido módulos negativos o módulos con valores imaginarios.

El ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OC}$ con el semieje real positivo podemos calcularlo con la función trigonométrica inversa de la tangente. Este ángulo se conoce como argumento o fase del número complejo.

Argumento de un número complejo $z=(a,b)$

$$\textit{argumento o fase de un número complejo} \equiv \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dado un complejo $z=(a,b)$ es común denotar la parte real y la parte imaginaria como:

$$a \equiv parte\ real \equiv Re(z)$$
$$b \equiv parte\ imaginaria \equiv Im(z)$$
$$módulo\ de\ un\ número\ complejo \equiv |z| = \sqrt{Re^2(z)+Im^2(z)}$$
$$argumento\ o\ fase\ de\ un\ número\ complejo \equiv \alpha = arctg\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$

Diferencia y división de números complejos en forma binómica. Propiedades del conjugado

La **diferencia** o resta de complejos se define como la **suma del minuendo más el opuesto del sustraendo**.

$(a,b)-(c,d)=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d)$ → Diferencia de afijos.

$(a+b\cdot i)-(c+d\cdot i)=(a+b\cdot i)+(-c-d\cdot i)=(a-c)+(b-d)i$ → Forma binómica.

La **división** de dos números complejos se define como el **producto del dividendo por el inverso del divisor**.

$(a,b):(c,d)=\frac{(a,b)}{(c,d)}=(a,b)\cdot[(c,d)]^{-1}=(a,b)\cdot(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2})$ → Afijos.

$(a+b\cdot i):(c+d\cdot i)=\frac{(a+b\cdot i)}{(c+d\cdot i)}=(a+b\cdot i)\cdot[(c+d\cdot i)]^{-1}=(a+b\cdot i)\cdot(\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}\cdot i)$ → Binómica.

En la práctica **es más cómodo realizar las divisiones multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador**:

División de complejos usando el conjugado del denominador

$i^2=-1$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c^2+d^2)}$$

Recordamos que el **conjugado de un complejo** tiene una **notación especial**:

$$conjugado\ de\ z=\overline{z}$$

Si multiplicamos un número complejo por su conjugado, el resultado es el cuadrado del módulo del complejo (recuerda que el módulo lo definimos como la longitud del vector que representa al número en el plano complejo):

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2 \quad\rightarrow\quad z\cdot\overline{z}=|z|^2 \quad\rightarrow\quad |z|=+\sqrt{z\cdot\overline{z}}$$

Nuevamente comprobamos que el módulo de un número complejo es una cantidad real y positiva.

Propiedades del conjugado de un número complejo $z=a+b\cdot i$

$z\cdot\bar{z}=|z|^2$ → el cuadrado del módulo de z es el producto de z por su conjugado.

$\bar{\bar{z}}=z \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{(a+bi)}}=(a+bi)$ → El conjugado del conjugado es el complejo de partida.

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ → El conjugado de la suma es la suma de conjugados.

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ → El conjugado del producto es el producto de conjugados.

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ → El conjugado del cociente es el cociente de conjugados.

$\overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}$ → El conjugado del inverso es el inverso del conjugado.

Para practicar...

Demuestra las propiedades arriba indicadas del conjugado de un número complejo.

Potencias de números complejos en forma binómica

El valor de las potencias i^m de la unidad imaginaria se repiten de cuatro en cuatro, por lo que podemos estudiar i^m desde el caso más sencillo i^r , con r el resto de la división entera $\frac{m}{4}$.

$Resto\ 0$	$i^0=1$	$i^4=i^2\cdot i^2=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$
$Resto\ 1$	$i^1=i$	$i^5=i^4\cdot i=i$	$i^9=i$	$i^{13}=i$
$Resto\ 2$	$i^2=-1$	$i^6=i^5\cdot i=-1$	$i^{10}=-1$	$\cdots$
$Resto\ 3$	$i^3=i\cdot i^2=-i$	$i^7=i^6\cdot i=-i$	$i^{11}=-i$	...

Si tenemos un número complejo expresado en forma binómica y lo elevamos a una potencia m , por lo general deberemos hacer uso del **binomio de Newton** para desarrollar la potencia.

La forma del binomio de Newton es bien conocida para potencias pequeñas $(0,1,2,3...)$, pero para potencias mayores la expresión final se complica.

$$(x+y)^0=1$$
$$(x+y)^1=x+y$$
$$(x+y)^2=x^2+2\text{xy}+y^2$$
$$(x+y)^3=x^3+3\text{x}^2y+3\text{xy}^2+y^3$$
$$(x+y)^4=x^4+...$$

Los valores x,y del binomio pueden expresar números, expresiones algebraicas, etc. En complejos representarán la parte real y la parte imaginaria.

La forma general del binomio de Newton para cualquier potencia m nos da una expresión unificada para desarrollar el binomio. Las potencias de los valores x,y están relacionadas con los coeficientes que los acompañan, por lo que el binomio de Newton queda expresado de la siguiente manera:

$$(x+y)^m=\binom{m}{0}x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}y+\binom{m}{2}x^{m-2}y^2+\binom{m}{3}x^{m-3}y^3+...+\binom{m}{m-1}xy^{m-1}+\binom{m}{m}y^m$$

¿Qué es la expresión $\binom{m}{n}$, con $m \geqslant n$? Es el conocido como **número combinatorio**, que cumple las siguientes propiedades:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} , \quad m \geqslant n$$

$$n! \equiv n \ \ factorial$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ \rightarrow \ \binom{m}{0} = 1 \ , \ \binom{m}{1} = m \ , \ \binom{m}{m} = 1$$

En la web de la asignatura encontrarás más información teórico-práctica sobre el binomio de Newton y su aplicación a los complejos en notación binómica: $(a+bi)^m$.

Ejemplo

Desarrollo del binomio de Newton a la cuarta potencia, aplicado a un número complejo.

$$(a+bi)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 (bi) + \binom{4}{2} a^2 (bi)^2 + \binom{4}{3} a (bi)^3 + \binom{4}{4} (bi)^4$$

$$(a+bi)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot bi + 6 \cdot a^2 \cdot (bi)^2 + 4 \cdot a \cdot (bi)^3 + (bi)^4$$

$$(a+bi)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot bi - 6 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 i + b^4$$

$$(a+bi)^4 = a^4 + b^4 - 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot (a^3 \cdot b - a \cdot b^3) i$$

Con este ejemplo intuimos lo tedioso que resulta aplicar potencias a un complejo en notación binómica. ¿Qué hacemos?... En breve veremos la notación polar para complejos, que nos facilitará esta ardua tarea.

Raíz cuadrada de un número complejo

La **raíz cuadrada de un complejo será otro número complejo tal que su cuadrado sea el complejo radicando**. Es decir:

$$\sqrt{a+bi}=c+di \;\rightarrow\; a+bi=(c+di)^2 \;\rightarrow\; a+bi=c^2+(di)^2+2\text{cdi} \;\rightarrow\; a+bi=c^2-d^2+2\text{cdi}$$

Generándose el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} a=c^2-d^2 \\ b=2\text{cd} \end{Bmatrix}$$

Raíz de un número complejo $z=a+b\cdot i$

$$\sqrt{a+bi}=c+di \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix} a=c^2-d^2 \\ b=2\text{cd} \end{Bmatrix}$$

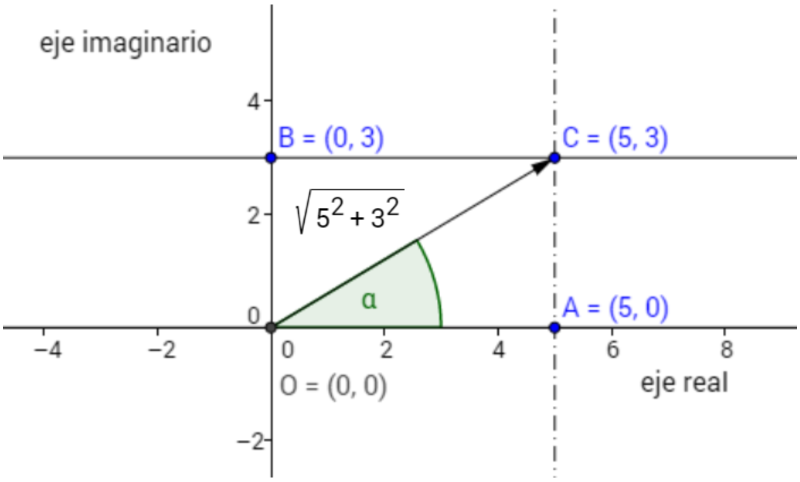
Si conocemos (a,b) obtenemos de manera única su raíz compleja (c,d) .

Para practicar...

Eleva el complejo $z=2+3\cdot i$ al cuadrado y, luego, aplica la raíz al resultado del cuadrado. Verás que obtienes el complejo de partida y su opuesto.

Forma polar de un número complejo y relación con la forma binómica: notación trigonométrica

Retomemos la representación gráfica en el plano complejo, con el eje horizontal real y el eje vertical imaginario.



Por Pitágoras calculamos el módulo (longitud) del vector complejo:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ → en nuestro ejemplo de la gráfica $|z|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

El argumento o fase (ángulo que forma el vector con el semieje positivo real) es:

$\alpha=arctg(\frac{b}{a})$ → en nuestro ejemplo $\alpha=arctg(\frac{3}{5})\simeq 30{,}963^o(primer\ \ cuadrante)$

Para obtener la fase del ejemplo hemos tenido en cuenta que $a>0, b>0$, que implica un punto del primer cuadrante del plano complejo.

Notación polar de un número complejo $z=a+b\cdot i$

Conocido el módulo $|z|$ y la fase α, cualquier complejo puede expresarse de la forma:

$z=|z|_\alpha$ → **Notación polar de un número complejo.**

El módulo suele representarse, en la forma polar, como $|z|=r$ en alusión al radio vector que representamos en el plano.

Y la fase, como ya sabemos de trigonometría, mantiene las mismas razones trigonométricas independientemente de las vueltas completas que demos al ángulo α .

Por lo tanto, podemos escribir la forma polar de la siguiente manera:

$z=r_{\alpha+360^o\cdot k,\, k\in\mathbb{Z}}$ → en nuestro ejemplo $z=\sqrt{34}_{30,963^o+360^o\cdot k\, ,\, k\in\mathbb{Z}}$

En notación binómica sabemos que dos números complejos son iguales si coinciden sus partes reales e imaginarias. **En notación polar diremos que dos números complejos son iguales si sus módulos son iguales y si sus fases son iguales o se diferencian en 360º o en un múltiplo de 360º (número entero de vueltas, tanto positivas como negativas)**.

¿Podemos relacionar la notación binómica con la notación polar? Sí, a través de la llamada forma trigonométrica de un número complejo. En el triángulo *OAC* de la gráfica anterior podemos definir el coseno y el seno del ángulo α .

$$\cos\alpha=\frac{a}{r} \quad\rightarrow\quad a=r\cdot\cos\alpha$$

$$sen\,\alpha=\frac{b}{r} \quad\rightarrow\quad b=r\cdot sen\,\alpha$$

Es decir:

Forma trigonométrica de un número complejo $z=a+b\cdot i$

Conocido el módulo $|z|$ y la fase α , cualquier complejo puede expresarse de la forma:

$z=a+bi=r\cdot\cos\alpha+r\cdot sen\,\alpha\cdot i=r\cdot(\cos\alpha+sen\,\alpha\cdot i)$ → **Notación trigonométrica.**

Ejemplo

Representa el afijo $z=(-8,4)$ en su forma binómica, polar y trigonométrica.

Forma binómica → $z=-8+4i$.

Módulo → $z=\sqrt{(-8)^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

Fase → $\alpha=arctg(\frac{4}{-8})=arctg(\frac{-1}{2})\simeq 153{,}434^o$ $(segundo\ cuadrante)$

Forma polar → $z=\sqrt{80}_{153{,}434^o+360º\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}}$

Forma trigonométrica → $z=\sqrt{80}\cdot\cos(153{,}434^o)+\sqrt{80}\cdot sen(153{,}434^o)\cdot i$

Producto de complejos en notación polar

Sean dos números complejos en forma polar:

$$z_1 = r_\alpha = r \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)$$
$$z_2 = r'_\beta = r' \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)$$

Realicemos el producto:

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i) \cdot r' \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot r' \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i) \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot r' \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\,\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot \cos\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \cdot i^2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot r' \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta + \cos\alpha \cdot sen\,\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot \cos\beta \cdot i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot r' \cdot [(\cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta) + (\cos\alpha \cdot sen\,\beta + sen\,\alpha \cdot \cos\beta) \cdot i]$$
$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot r' \cdot [\cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha+\beta) \cdot i]$$
$$z_1 \cdot z_2 = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$
$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Producto de complejos en forma polar.

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Es decir, **el resultado de multiplicar dos complejos en forma polar es otro complejo que tiene como módulo el producto de los módulos, y como argumento la suma de los argumentos**.

Una consecuencia de este producto de complejos en forma polar es el caso particular 1_β . Si multiplico $z = r_\alpha$ por 1_β el resultado es el mismo complejo z girado β grados en sentido contrario a las agujas del reloj. Es decir:

$$r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$$

Cociente de complejos en notación polar

Sean dos números complejos en forma polar:

$$z_1 = r_\alpha = r \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)$$
$$z_2 = r'_\beta = r' \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)$$

Realicemos el cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)}{r' \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i}{\cos\beta + sen\,\beta \cdot i} \cdot \frac{\cos\beta - sen\,\beta \cdot i}{\cos\beta - sen\,\beta \cdot i}$$

Operamos, recordando que $i^2 = -1$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\,\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot \cos\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}{\cos^2\beta + sen^2\beta}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta + (sen\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\,\beta) \cdot i}{\cos^2\beta + sen^2\beta}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta) + sen(\alpha - \beta) \cdot i}{\cos^2\beta + sen^2\beta}$$

Aplicamos la relación fundamental de trigonometría $\cos^2\beta + sen^2\beta = 1$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + sen(\alpha - \beta) \cdot i)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha - \beta}$$

Cociente de complejos en forma polar.

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Es decir, **el resultado de dividir dos complejos en forma polar es otro complejo que tiene como módulo el cociente de los módulos, y como argumento la diferencia de los argumentos**.

Una consecuencia de este cociente de complejos en forma polar es el caso particular 1_β. Si divido $z=r_\alpha$ por 1_β el resultado es el mismo complejo z girado β grados en el sentido de las agujas del reloj. Es decir:

$$\frac{r_\alpha}{1_\beta}=r_{\alpha-\beta}$$

También podemos aplicar la notación polar para obtener, de forma sencilla, el inverso de un número complejo; recordando que un número complejo multiplicado por su inverso da 1.

$$r_\alpha\cdot(r_\alpha)^{-1}=1_0 \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\frac{1_0}{r_\alpha} \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0-\alpha} \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{360º-\alpha}$$

Es decir: el inverso de un número complejo z en forma polar es un nuevo complejo, de módulo el inverso del módulo de z, y argumento $360º$ menos el argumento de z.

Potencia de complejos en notación polar y trigonométrica. Fórmula de Moivre

Sea z un número complejo que vamos a elevar a la n-ésima potencia, con $n \in \mathbb{N}$.

$$z^n = (r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \ldots \cdot r_\alpha \equiv producto\ de\ n\ veces\ r_\alpha \equiv (r^n)_{n \cdot \alpha}$$

Potencia de complejos en forma polar.

$$z^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{n \cdot \alpha}$$

Es decir, **el resultado de elevar un complejo z en forma polar a la potencia n-ésima es otro complejo que tiene como módulo el módulo de z elevado a la n-ésima potencia, y como argumento el producto de n por el argumento de z .**

Usando la notación trigonométrica:

$$[r(\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)]^n = r^n[\cos(n \cdot \alpha) + sen(n \cdot \alpha) \cdot i]$$

$$r^n[\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i]^n = r^n[\cos(n \cdot \alpha) + sen(n \cdot \alpha) \cdot i]$$

Simplificando:

$$(\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)^n = \cos(n \cdot \alpha) + sen(n \cdot \alpha) \cdot i$$

Fórmula de Moivre.

$(\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)^n = \cos(n \cdot \alpha) + sen(n \cdot \alpha) \cdot i$, con $n \in \mathbb{N}$

Radicación de complejos en notación polar

Si aplicamos raíz n-ésima a un complejo en notación polar, obtenemos:

$\sqrt[n]{r_\alpha}=r'_\beta$ ==> $r_\alpha=(r'_\beta)^n$ ==> $r_\alpha=(r')^n_{n\cdot\beta}$, con $n\in\mathbb{N}$

Y dos complejos en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también lo son (o se diferencian un número de vueltas completas de 360º en el plano complejo). Es decir:

$r=(r')^n$ ==> $\sqrt[n]{r}=r'$

$\alpha+360^o\cdot k=n\cdot\beta$ ==> $\dfrac{\alpha+360^o\cdot k}{n}=\beta$, con $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$

Si rompemos la igualdad de argumentos en dos fracciones: $\dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{k}{n}=\beta$

¿Cuántas soluciones distintas de la raíz n-ésima tenemos en una vuelta de 360º?

$si\ k=0\ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{n}=\beta_1$

$si\ k=1\ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{1}{n}=\beta_2$

$si\ k=2\ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{2}{n}=\beta_3$

$si\ k=3\ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{3}{n}=\beta_4$

…....................

…....................

$si\ k=n-1\ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{n-1}{n}=\beta_n$

$si\ k=n\ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{n}+360^o\cdot\dfrac{n}{n}=\dfrac{\alpha}{n}+360^o=\beta_1$

Es decir, para $k=n$ obtenemos el mismo argumento $\dfrac{\alpha}{n}$ que obtuvimos en $k=0$, diferenciado por una vuelta de 360º. Por lo tanto: en una vuelta de 360º tenemos n raíces n-ésimas distintas.

Raíz n-ésima de un número complejo en forma polar.

$\sqrt[n]{r_\alpha}=(\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+360^{\circ}\cdot k}{n}}$, con $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$

El complejo $z=r_\alpha$ tiene n raíces n-ésimas distintas. Para $k\geq n$ y $k<0$ repetimos los mismos argumentos contenidos en una vuelta completa de 360º.

Las raíces n-ésimas de $z=r_\alpha$ forman los vértices de un polígono regular de n-lados, centrado en el origen del plano complejo, inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$.

Ejemplo

Calcula las raíces cuartas de $81_{120^{\circ}}$.¿Qué figura forman sus afijos?

, con $k=0,1,2,3$

Para cada valor de k obtenemos una raíz cuarta:

$$z_0=(\sqrt[4]{81})_{\frac{120^{\circ}+360^{\circ}\cdot 0}{4}}=3_{30^{\circ}}$$

$$z_1=3_{\frac{120^{\circ}+360^{\circ}\cdot 1}{4}}=3_{120^{\circ}}$$

$$z_2=3_{\frac{120^{\circ}+360^{\circ}\cdot 2}{4}}=3_{210^{\circ}}$$

$$z_3=3_{\frac{120^{\circ}+360^{\circ}\cdot 3}{4}}=3_{300^{\circ}}$$

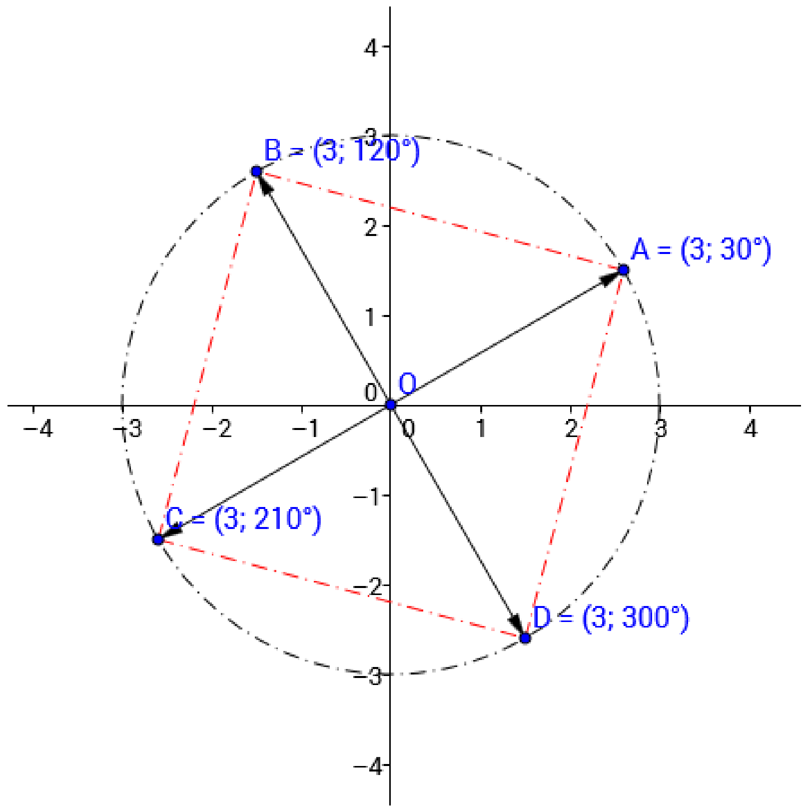
Por supuesto, en cada raíz podemos sumar todas las vueltas completas de 360º que deseemos y seguiríamos obteniendo un complejo equivalente.

También puedes comprobar que para $k=4$ $\rightarrow$ $z_4=3_{390^{\circ}}=3_{30^{\circ}}=z_0$ $\rightarrow$ Recuperamos la primera de las raíces.

Al calcular las raíces cuartas del ejemplo anterior, $z=81_{120^{\circ}}$, obtenemos cuatro valores distintos.

Estos valores coinciden con los vértices de un cuadrado, inscrito a su vez en una circunferencia de radio 3 . Es decir, el radio tiene como longitud la raíz cuarta de 81 .

En la siguiente gráfica hemos representado los cuatro valores solución en el plano complejo, junto a la circunferencia que circunscribe al cuadrado ya indicado.



Podemos preguntarnos por la longitud del lado del cuadrado. Dos puntos cualesquiera del plano complejo $A(a,b)$ y $B(c,d)$ estarán separados una distancia que puede calcularse de la siguiente forma:

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

Si en nuestro ejemplo tomamos como muestra los puntos A y B, tendremos:

$$A=3_{30^o}=3\cdot cos30^o+3\cdot sen30^o\cdot i=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot i \quad\rightarrow\quad A(a,b)=(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$$

$$B=3_{120^o}=3\cdot cos120^o+3\cdot sen120^o\cdot i=3\cdot\frac{-1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \quad\rightarrow\quad B(c,d)=(\frac{-3}{2},\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(\frac{-3}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{(\frac{-3-3\cdot\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3\cdot\sqrt{3}-3}{2})^2}$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\frac{9+27+18\cdot\sqrt{3}}{4}+\frac{27+9-18\cdot\sqrt{3}}{4}}$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\frac{72}{4}}=\sqrt{18}\simeq 4{,}243$$

Raíces de una ecuación. Teorema fundamental del álgebra

Si $z \in \mathbb{C}$ es solución de una ecuación polinómica con coeficientes reales, su conjugado $\bar{z}$ también es solución de la misma ecuación.

Podemos demostrar este enunciado, de manera sencilla, para un polinomio $P(x)$ de grado 2, de coeficientes reales, y con dos raíces complejas z_1 y z_2 . Si factorizamos el polinomio en sus raíces:

$P(x)=(x-z_1)(x-z_2)$, con $x \in \mathbb{R}$

Y el resultado de este producto debe ser real si x es real. Y, como ya demostramos en apartados anteriores, z_1 y z_2 deben ser conjugados para que su producto sea real:

$z_2=\overline{z_1} \rightarrow P(x)=(x-z_1)(x-\overline{z_1}) \rightarrow P(x)=|x-z_1|^2 \in \mathbb{R}, \ si \ x \in \mathbb{R}$

De manera general podemos afirmar (sin demostrar) que t**odo polinomio de grado n, $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces (teorema fundamental del álgebra)**.