

Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Complejos - Hoja 7 - Todos resueltos

Hoja 7. Problema 1

1. Opera y simplifica.

$$\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$$

Expresamos cada número complejo en forma polar.

$$\sqrt{2}+i \rightarrow \text{módulo}=\sqrt{2+2}=2, \text{ fase}=\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=45^\circ \rightarrow 2_{45^\circ}$$

$$\sqrt{3}+i \rightarrow \text{módulo}=\sqrt{3+1}=2, \text{ fase}=\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30^\circ \rightarrow 2_{30^\circ}$$

Elevamos el numerador al cubo $\rightarrow (2_{45^\circ})^3=8_{135^\circ}$

Elevamos el denominador al cuadrado $\rightarrow (2_{30^\circ})^2=4_{60^\circ}$

Dividimos numerador entre denominador $\rightarrow \frac{8_{135^\circ}}{4_{60^\circ}}=2_{75^\circ}$

Aplicamos raíz cuarta al resultado del cociente $\rightarrow \sqrt[4]{2_{75^\circ}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{75^\circ+360^\circ k}{4}}, k=0,1,2,3$

Las cuatro soluciones resultan:

$$(\sqrt[4]{2})_{18,75^\circ}, (\sqrt[4]{2})_{108,75^\circ}, (\sqrt[4]{2})_{198,75^\circ}, (\sqrt[4]{2})_{288,75^\circ}$$

Cada fase con todas la vueltas de 360° que deseemos aplicar.

Hoja 7. Problema 2

2. Calcular el valor de a para que el resultado del siguiente cociente sea un número imaginario puro.

$$\frac{2+ai}{3-i}$$

Multiplico y divido por el conjugado del denominador (recuerda $i^2 = -1$).

$$\frac{2+ai}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i+3ai-a}{9+1} = \frac{6-a+(2+3a)i}{10} = \frac{6-a}{10} + \frac{2+3a}{10} \cdot i$$

Un número imaginario puro no tiene parte real, por lo que igualamos a cero la parte real.

$$\frac{6-a}{10} = 0 \rightarrow a = 6$$

Hoja 7. Problema 3

3. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

Los números complejos son conjugados entre sí. Por lo tanto:

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = a - bi$$

La suma de sus partes reales es igual a 6 $\rightarrow a + a = 6 \rightarrow a = 3$

La suma de sus módulos es 10 $\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \rightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} = 10 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

En la segunda ecuación llevamos el resultado $a = 3 \rightarrow \sqrt{9 + b^2} = 5$

Elevamos al cuadrado $\rightarrow 9 + b^2 = 25 \rightarrow b = \pm 4$

Los dos números complejos conjugados resultan en forma binómica:

$$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 3 - 4i$$

Y en forma polar:

$$z_1 = 5_{53,13^\circ}, \quad z_2 = 5_{306,87^\circ}$$

Cada fase con todas las vueltas de 360° que deseemos aplicar.

Hoja 7. Problema 4

4. Opera y desarrolla la siguiente potencia y expresa el resultado final en notación polar, trigonométrica y binómica.

$$(\sqrt{2}-i)^6$$

Expreso el número complejo en forma polar.

$$\sqrt{2}-i \rightarrow \text{módulo} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \quad , \quad \text{fase} = \arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 324,74^\circ \rightarrow (\sqrt{3})_{324,74^\circ}$$

Lo elevamos a la sexta potencia.

$$[(\sqrt{3})_{324,74^\circ}]^6 = 27_{1948,44^\circ}$$

Expresamos la fase en el intervalo de 0° a 360° .

$$360^\circ \cdot 5 = 1800^\circ \rightarrow 1948,44^\circ - 1800^\circ = 148,44^\circ \rightarrow 27_{148,44^\circ} \rightarrow \text{notación polar}$$

$$z = 27 \cdot \cos(148,44^\circ) + 27 \cdot \text{sen}(148,44^\circ) \cdot i \rightarrow \text{notación trigonométrica}$$

$$z \simeq -23 + 14,13 \cdot i \rightarrow \text{notación binómica}$$

Hoja 7. Problema 5

5. Determinar a y b para que el cociente $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a $(\sqrt{2})_{45^\circ}$.

En el cociente, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (recuerda que $i^2 = -1$).

$$\frac{a+2i}{3+bi} \cdot \frac{3-bi}{3-bi} = \frac{3a-abi+6i+2b}{9+b^2} = \frac{3a+2b}{9+b^2} + \frac{6-ab}{9+b^2} \cdot i$$

El número complejo en forma polar lo expresamos en forma binómica, con ayuda de la ecuación trigonométrica.

$$(\sqrt{2})_{45^\circ} = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ) + \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(45^\circ)i = 1+i$$

Igualamos parte real con parte real, e imaginaria con imaginaria.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3a+2b}{9+b^2} = 1 \\ \frac{6-ab}{9+b^2} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a+2b=9+b^2 \\ 6-ab=9+b^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a+2b=9+b^2 \\ -ab=3+b^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a+2b=9+b^2 \\ a = \frac{-3-b^2}{b} \end{array} \right\}$$

Sustituimos el valor de a de la segunda ecuación del sistema en la primera ecuación.

$$3 \cdot \frac{-3-b^2}{b} + 2b = 9+b^2 \rightarrow -9-3b^2+2b^2 = 9b+b^3 \rightarrow -9-b^2 = 9b+b^3$$

$$b^3+b^2+9b+9=0 \rightarrow \text{aplico Ruffini}$$

-1	1	1	9	9
1	0	9	0	0

Es decir $\rightarrow b^3+b^2+9b+9=0 \rightarrow (b+1)(b^2-9)=0 \rightarrow$ Única solución real $\rightarrow b=-1$

$$\text{Si } b=-1 \rightarrow a = \frac{-3-1}{-1} = 4$$

Hoja 7. Problema 6

6. Resuelve $x^4 + 16 = 0$. Escribe las soluciones en notación polar.

$$x^4 + 16 = 0 \rightarrow x^4 = -16 \rightarrow \text{Expresamos } -16 \text{ como forma polar} \rightarrow -16 = (16)_{180^\circ}$$

$$x^4 = (16)_{180^\circ} \rightarrow x = \sqrt[4]{(16)_{180^\circ}} = (\sqrt[4]{16})_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = 2_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$$

Si $k = 0 \rightarrow \text{fase} = 45^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \text{fase} = 135^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \text{fase} = 225^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \text{fase} = 315^\circ$

Hoja 7. Problema 7

7. Sea el afijo $A(4,4)$ perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea el afijo complejo $B(-8\sqrt{3},8)$?

Expresamos ambos complejos en forma polar.

$$A(4,4) \rightarrow 4+4i \rightarrow \text{módulo}=\sqrt{32}=4\sqrt{2} \text{ , fase}=\text{arctg}\left(\frac{4}{4}\right)=45^\circ \rightarrow (4\sqrt{2})_{45^\circ}$$

$$B(-8\sqrt{3},8) \rightarrow -8\sqrt{3}+8i \rightarrow \text{módulo}=\sqrt{64 \cdot 3+64}=16 \text{ , fase}=\text{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)=-30^\circ$$

$$B(-8\sqrt{3},8) \text{ pertenece al segundo cuadrante} \rightarrow \text{fase}=-30^\circ=330^\circ \rightarrow 150^\circ \rightarrow (16)_{150^\circ}$$

Expresamos la relación del enunciado.

$$(4\sqrt{2})_{45^\circ} \cdot r_\alpha = (16)_{150^\circ} \rightarrow (4\sqrt{2} \cdot r)_{45^\circ+\alpha} = (16)_{150^\circ}$$

Donde r_α es el complejo que estamos buscando, en forma polar. Igualamos módulos e igualamos fases.

$$4\sqrt{2} \cdot r = 16 \rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$45^\circ + \alpha = 150^\circ \rightarrow \alpha = 105^\circ$$

$$\text{Solución} \rightarrow r_\alpha = (2\sqrt{2})_{105^\circ+360^\circ k} \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

Hoja 7. Problema 8

8. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1+6i$ y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los números complejos es igual a uno.

Los dos números complejos son:

$$z_1 = a+bi \quad , \quad z_2 = c+i$$

Donde hemos considerado la parte imaginaria del segundo número igual a la unidad. Realizamos la suma de ambos números complejos.

$$z_1 + z_2 = 1+6i \rightarrow (a+c) + (b+1)i = 1+6i \rightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+1=6 \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema obtenemos $\rightarrow b=5$

Realizamos el cociente, que da lugar a un número imaginario puro.

$$\frac{a+5i}{c+i} \cdot \frac{c-i}{c-i} = \frac{ac-ai+5ci+5}{c^2+1} = \frac{ac+5}{c^2+1} + \frac{5c-a}{c^2+1}i \rightarrow \frac{ac+5}{c^2+1} = 0 \rightarrow ac+5=0$$

Podemos formar un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y c .

$$\begin{cases} a+c=1 \\ ac+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=1-a \\ ac+5=0 \end{cases} \rightarrow \text{Sustituimos el valor de la primera en la segunda.}$$

$$a(1-a)+5=0 \rightarrow a-a^2+5=0 \rightarrow a^2-a-5=0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Si } a = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \rightarrow c = 1 - \frac{1+\sqrt{21}}{2} = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \rightarrow z_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} + 5i \quad , \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2} + i$$

$$\text{Si } a = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \rightarrow c = 1 - \frac{1-\sqrt{21}}{2} = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \rightarrow z_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2} + 5i \quad , \quad z_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} + i$$

Hoja 7. Problema 9

9. Una de las soluciones de la raíz quinta de un número complejo es el afijo $A(1, \sqrt{3})$. Calcula las restantes soluciones de esa raíz quinta, en forma trigonométrica.

Sabemos que las soluciones de una raíz quinta comporten el mismo módulo (en forma polar) y las fases se diferencian en 72° , ya que $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

$$A(1, \sqrt{3}) \rightarrow 1 + \sqrt{3}i \rightarrow \text{módulo} = \sqrt{1+3} = 2, \quad \text{fase} = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^\circ$$

$$(2)_{60^\circ} \rightarrow 2 \cdot \cos(60^\circ) + 2 \cdot \text{sen}(60^\circ)i$$

El resto de soluciones son:

$$(2)_{60^\circ+72^\circ} = (2)_{132^\circ} \rightarrow 2 \cdot \cos(132^\circ) + 2 \cdot \text{sen}(132^\circ)i$$

$$(2)_{132^\circ+72^\circ} = (2)_{204^\circ} \rightarrow 2 \cdot \cos(204^\circ) + 2 \cdot \text{sen}(204^\circ)i$$

$$(2)_{204^\circ+72^\circ} = (2)_{276^\circ} \rightarrow 2 \cdot \cos(276^\circ) + 2 \cdot \text{sen}(276^\circ)i$$

$$(2)_{276^\circ+72^\circ} = (2)_{348^\circ} \rightarrow 2 \cdot \cos(348^\circ) + 2 \cdot \text{sen}(348^\circ)i$$

■ Hoja 7. Problema 10

10. Calcula $\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}$.

Operamos en el numerador y en el denominador, recordando que $i^2 = -1$.

$$\frac{(3-i)^2}{i(1+i)} = \frac{9+i^2-6i}{i-1} = \frac{8-6i}{-1+i}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{8-6i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-8-8i+6i+6i^2}{1+1} = \frac{-14-2i}{2} = -7-i$$

Hoja 7. Problema 11

11. Obtener la forma binómica y polar del número complejo $(\sqrt{3}, 1)$. Obtener también su conjugado y su inverso en forma polar.

$$(\sqrt{3}, 1) \rightarrow \sqrt{3} + i \rightarrow \text{forma binómica}$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{3+1} = 2, \quad \text{fase} = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ \rightarrow (2)_{30^\circ} \rightarrow \text{forma polar}$$

$$\text{Conjugado} \rightarrow \sqrt{3} - i \rightarrow (2)_{330^\circ} \rightarrow \text{forma polar del conjugado}$$

$$\text{Inverso} \rightarrow \frac{1}{(2)_{30^\circ}} = \frac{1_{0^\circ}}{(2)_{30^\circ}} = \left(\frac{1}{2}\right)_{-30^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)_{330^\circ + 360^\circ k}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{forma polar del inverso}$$

Hoja 7. Problema 12

12. Obtener z en la ecuación $\frac{z}{1+i} + \frac{z}{i} = 2i$, sabiendo que z es un número complejo.

Sea $z = a + bi$ nuestro número complejo solución. Operamos con los denominadores de la ecuación.

$$\frac{z}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{z}{i} \cdot \frac{i}{i} = 2i \rightarrow \frac{z - zi}{1+1} - zi = 2i \rightarrow \frac{z}{2} - \frac{z}{2}i - zi = 2i \rightarrow \frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2} + z\right)i = 2i$$

$$\frac{z}{2} - \frac{3z}{2}i = 2i$$

Si $z = a + bi \rightarrow \frac{a+bi}{2} - \frac{3(a+bi)}{2}i = 2i \rightarrow \frac{a+bi}{2} - \frac{3ai-3b}{2} = 2i$

$$\frac{a+bi-3ai+3b}{2} = 2i \rightarrow a+3b+(b-3a)i = 4i$$

Tenemos una igualdad de números complejos, por lo que igualamos las partes reales y las partes imaginarias.

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ b-3a=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-3b \\ b-3a=4 \end{cases} \rightarrow \text{Sustituimos el valor de la primera en la segunda}$$

$$b-3(-3b)=4 \rightarrow b+9b=4 \rightarrow b=\frac{2}{5} \rightarrow a=-3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{-6}{5} \rightarrow z = \frac{-6}{5} + \frac{2}{5}i$$