Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Complejos - Hoja 2- Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

Resuelto por Cristina Pérez (diciembre 2014)

1. Simplifica:

a) $\frac{i^{17}+i^{23}}{i^{16}+i^{33}}$

b) $\frac{i^{27}-i^{31}}{i^{101}+i^{32}}$

c) $\frac{2i^{14}-3i^{18}}{4i^{73}+5i^{21}}$

a) En cada potencia dividimos entre cuatro para poder calcular el resto de la división entera:

- $i^{17} \rightarrow \frac{17}{4} \rightarrow r=1 \rightarrow i^{17}=i$
- $i^{23} \rightarrow \frac{23}{4} \rightarrow r=3 \rightarrow i^{23}=-i$
- $i^{16} \rightarrow \frac{16}{4} \rightarrow r=0 \rightarrow i^{16}=1$
- $i^{33} \rightarrow \frac{33}{4} \rightarrow r=1 \rightarrow i^{33}=i$

Despues de calcular los valores, se calcula la fracción:

$\frac{i-i}{1+i}=0$

b) En cada potencia, la divides entre cuatro para poder calcular su valor:

- $i^{27} \rightarrow \frac{27}{4} \rightarrow r=3 \rightarrow i^{27}=-i$
- $i^{31} \rightarrow \frac{31}{4} \rightarrow r=3 \rightarrow i^{31}=-i$

- $i^{101} \rightarrow \frac{101}{4} \rightarrow r=1 \rightarrow i^{101}=i$
- $i^{32} \rightarrow \frac{32}{4} \rightarrow r=0 \rightarrow i^{32}=1$

Despues de calcular los valores, se calcula la fracción:

$\frac{-i+i}{i+1}=0$

c) $\frac{2i^{14}-3i^{18}}{4i^{73}+5i^{21}}$

En cada potencia, la divides entre cuatro para poder calcular su valor:

- $i^{14} \rightarrow \frac{14}{4} \rightarrow r=2 \rightarrow i^{14}=-1$
- $i^{18} \rightarrow \frac{18}{4} \rightarrow r=2 \rightarrow i^{18}=-1$
- $i^{73} \rightarrow \frac{73}{4} \rightarrow r=1 \rightarrow i^{27}=i$
- $i^{21} \rightarrow \frac{21}{4} \rightarrow r=1 \rightarrow i^{21}=i$

Despues de calcular los valores, se calcula la fracción:

$\frac{-2+3}{4i+5i}=\frac{1}{9i}=\frac{-i}{9}$

Hoja 2. Problema 2

Resuelto por Ignacio de Orbe (noviembre 2014)

2. Resuelve (obtener el valor de x).

a) $(2+3i)+(1-5i)x=(4+2i)+(1-i)x$

b) $(5-i)x+(2+i)=(1-i)-(3+2i)x$

a) $2+3i+x-5ix=4+2i+x-ix$

$-2+i-4ix=0$

$i-4ix=2$

$i(1-4x)=2$

$1-4x=\frac{2}{i}$

$-4x=\frac{2}{i}-1$

$-4x=\frac{2-i}{i}$

$x=\frac{2-i}{-4i}=\frac{2}{-4i}+\frac{i}{4i}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2i}=\frac{1}{4}-\frac{1i}{2i^2}$

$x=\frac{1}{4}+\frac{i}{2}$

b) $(5-i)x+(2+i)=(1-i)-(3+2i)x$

$5x-ix+2+i=1-i-3x-2ix$

$8x+ix+1+2i=0$

$8x+ix=-1-2i$

$(8+i)x=-1-2i$

$$x=\frac{-1-2i}{8+i}=\frac{(-1-2i)(8-i)}{(8+i)(8-i)}=\frac{-8-16i+i+2i^2}{64-i^2}$$

$$x=\frac{-8-15i-2}{64+1}=\frac{-10+15i}{65}=\frac{-2-3i}{13}=\frac{-2}{13}-\frac{3i}{13}$$

Hoja 2. Problema 3

Resuelto por Mª Luisa Marín (noviembre 2014)

3. Calcular el valor de a para que el resultado de $\frac{2+a\,i}{3-i}$ sea un número imaginario puro

Multiplico y divido por el conjugado del denominador:

$$\frac{(2+a\,i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{6+2\,i+3\,a\,i+a\,i^2}{3^2-i^2}=\frac{6+2\,i+3\,a\,i-a}{9+1}$$

Separo la parte real de la imaginaria:

$$\frac{6-a}{10}+\frac{(2+3\,a)i}{10}$$

Como me piden que el resultado tiene que ser un número imaginario puro, igualo la parte real a 0:

$$\frac{6-a}{10}=0\ \rightarrow 6-a=0 \rightarrow a=6$$

Hoja 2. Problema 4

Resuelto por Valeriano Garrido Galán (diciembre 2014)

4. Deduce que el inverso del complejo (a + bi) es igual a $\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$

z = a + bi

$$inverso(a+bi) = z^{-1} = \frac{1}{a+bi}$$

Multiplico y divido por el conjugado del denominador

$$\frac{1}{a+bi} x \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

Sabiendo que

i^2=-1

$$\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$$

Hoja 2. Problema 5

Resuelto por Gabriel Espejo (diciembre 2014)

5. Deduce el elemento neutro y el elemento simétrico de la suma de complejos.

Elemento neutro de la suma: $(0,0) \rightarrow$

$$Z + (0,0) = Z$$

$$(a,b) + (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$$

Elemento simétrico de la suma: $(-a,-b) \rightarrow$

$$(a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$$

Hoja 2. Problema 6

Resuelto por Mario Olivares (diciembre 2014)

6. Deduce el elemento neutro y elemento simétrico de la multiplicación de complejos.

Elemento neutro del producto:

$$(1,0) \rightarrow (a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)=(a,b)$$

Este es un sencillo proceso por el cual se multiplican las partes reales de las parejas de valores y se les resta a la multiplicación de las partes imaginarias, más la suma de la parte imaginaria del primer término por la parte real del segundo término.

Elemento simétrico del producto

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\ ,\frac{b\cdot a}{a^2+b^2}+\frac{b\cdot a}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\ ,\ 0\right)=(1,0)$$

Este es un proceso mediante el cual multiplicamos la pareja de valor (a,b) por la otra pareja de valor:

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Lo que nos provoca que la multiplicación simplifique la pareja de valores a (1,0).

Hoja 2. Problema 7

Resuelto por María López (diciembre 2015)

7. Resuelve $x^4+16=0$

$x^4=-16 \rightarrow x=\sqrt[4]{-16}$

Expresamos -16 como complejo en forma polar → $-16+0i \rightarrow 16_{180º+360ºk\ ,\ k\in\mathbb{R}}$

$x=\sqrt[4]{16_{180º}} \rightarrow x=2_{\frac{180º+360ºk}{4}}, k=0,1,2,3$

Las cuatro soluciones son (igual módulo, y fases diferenciadas en 90º).

$x=2_{45º}$, $x=2_{135º}$, $x=2_{225º}$, $x=2_{315º}$

Cada solución, con todas las vueltas de 360º que deseemos aplicar.

Con notación unificada la solución queda → $2_{45º+90ºk}, k\in\mathbb{Z}$