Teoría – Tema 2

Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

Índice de contenido

Ecuaciones trigonométricas

Por lo general, los pasos a seguir para resolver ecuaciones trigonométricas son:

1. Dejar el argumento en función del mismo ángulo.
2. Expresar todo según la misma razón trigonométrica.
3. Resolver la ecuación, obteniendo el ángulo solución.

Ejemplo:

Resolver $4 \cdot sen(x) = sen(2x)$

Usamos la relación del seno del ángulo doble, para dejar todos los argumentos dependiendo del ángulo x .

$$4 \cdot sen(x) = 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) \quad \rightarrow \quad 2 \cdot sen(x) - sen(x) \cdot \cos(x) = 0$$

Sacamos factor común.

$$sen(x)(2 - \cos(x)) = 0$$

Igualamos cada factor de la multiplicación a 0. Así tendremos una ecuación que solo depende del seno y otra ecuación que solo depende del coseno.

$$sen(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0º, 180º, 360º... \quad \rightarrow \quad x = 0º + 180º\,k \,, k \in \mathbb{Z}$$

Fíjate que hemos dado media vuelta (180 grados) en vez de una vuelta (360º) para unificar todas las soluciones posibles.

$2 - \cos(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos(x) = 2 \quad \rightarrow$ No existe solución ya que $-1 \le \cos(x) \le 1$

Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Por lo general, podremos realizar un cambio de variable y resolver el sistema como de costumbre. Sin olvidar, al final, deshacer el cambio para obtener los ángulos solución.

Ejemplo:

Resuelve $\left\{\begin{array}{l} sen\,x + sen\,y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen\,x - sen\,y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right\}$

Cambio de variable:

$$sen\,x = a$$
$$sen\,y = b$$

El sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a-b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right\}$$

Aplicamos el método de reducción, sumando ambas ecuaciones:

$$2a = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$2a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}+1-1}{2}$$

$$2a = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Obtenemos la segunda variable.

$$b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - a$$
$$b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; b = \frac{1}{2}$$

Deshacemos los cambios de variable.

$a = \text{sen } x$

$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \text{arcosen } (\frac{\sqrt{3}}{2}) = 60^o + 360^o \cdot k, \quad 120^o + 360^o \cdot k \ , \ k \in \mathbb{Z}$

Donde hemos tenido en cuenta que el seno positivo puede darse en el primer y en el segundo cuadrante.

$b = \text{sen } y$

$\text{sen } y = \frac{1}{2}$

$x = \text{arcsen } (\frac{1}{2}) = 30^o + 360^o \cdot k, \quad 150^o + 360^o \cdot k \ , \ k \in Z$

Donde nuevamente hemos tenido en cuenta que el seno positivo puede darse en el primer y en el segundo cuadrante.