

Teoría – Tema 2

Suma y diferencia de ángulos, ángulo doble y ángulo mitad

Índice de contenido

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos.....	2
Razones trigonométricas del ángulo doble.....	4
Razones trigonométricas del ángulo mitad.....	5

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

Partimos del resultado demostrado en las páginas de teoría del libro de texto para el seno de la suma de ángulos.

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \text{seno de la suma}$$

La relación para el seno de la diferencia podemos justificarla de la siguiente forma:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha + (-\beta)) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(-\beta) + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(-\beta)$$

Recordamos que la función coseno es par y la función seno es impar. Por lo tanto:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \text{seno de la diferencia}$$

Para el coseno de la suma $\cos(\alpha + \beta)$ hacemos uso de un ángulo auxiliar γ que será complementario al ángulo suma. Es decir: $\gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta)$.

Y recordando la relación entre razones trigonométricas de ángulos complementarios:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \text{sen}(\gamma) = \text{sen}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{sen}((90^\circ - \alpha) + (-\beta)) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \text{sen}(90^\circ - \alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \text{sen}(-\beta)\end{aligned}$$

Recordando la relación entre ángulos complementarios, y que la función seno es impar:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \text{coseno de la suma}$$

El coseno de la diferencia podemos justificarlos a partir del coseno de la suma:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(-\beta)$$

Si la función coseno es par y la función seno es impar:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \text{coseno de la diferencia}$$

En la tangente de la suma partimos de la definición de tangente como cociente entre seno y coseno.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta) + \text{cos}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta)}{\text{cos}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta)}$$

Dividimos numerador y denominador por la expresión $\text{cos}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta)$.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} + \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{cos}(\beta)}}{1 - \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta)}{\text{cos}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta)}} \rightarrow tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha) \cdot tg(\beta)} \rightarrow \text{tangente de la suma}$$

Para la tangente de la diferencia:

$$tg(\alpha - \beta) = tg(\alpha + (-\beta)) = \frac{tg(\alpha) + tg(-\beta)}{1 - tg(\alpha) \cdot tg(-\beta)}$$

La función tangente es impar. Por lo tanto:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \cdot tg(\beta)} \rightarrow \text{tangente de la diferencia}$$

■ Razones trigonométricas del ángulo doble

Las razones de ángulos dobles queda expresadas de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \rightarrow \text{seno del ángulo doble}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) \rightarrow \text{coseno del ángulo doble}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha)}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)} \rightarrow \text{tangente del ángulo doble}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Para expresar, de forma compacta, el seno, coseno y tangente del ángulo mitad, partimos de las siguientes relaciones ya conocidas y demostradas:

$$1 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Sumamos ambas expresiones.

$$1 + \cos(\alpha) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \rightarrow \text{coseno del ángulo mitad}$$

Si restamos las dos expresiones de partida.

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \rightarrow \text{seno del ángulo mitad}$$

Utilizamos estos dos resultados del coseno y del seno del ángulo mitad, llegamos a una igualdad para la tangente del ángulo mitad.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} \rightarrow \text{tangente del ángulo mitad}$$