1. Demuestra la siguiente igualdad $sen(x+y)sen(x-y)=sen^2 x-sen^2 y$

Desarrollamos el seno de la suma y el seno de la diferencia.

$$sen(x+y)=sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y) \quad , \quad sen(x-y)=sen(x)\cos(y)-\cos(x)sen(y)$$

Multiplicamos ambas expresiones, tal y como aparece en el término izquierdo de la igualdad de partida.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=[sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y)]\cdot[sen(x)\cos(y)-\cos(x)sen(y)]$$

Operamos el producto suma por diferencia, igual a diferencia de cuadrados.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)\cdot\cos^2(y)-\cos^2(x)\cdot sen^2(y)$$

De la relación fundamental de trigonometría tenemos:

$$\cos^2(y)=1-sen^2(y) \quad , \quad \cos^2(x)=1-sen^2(x)$$

Sustituimos y operamos.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)\cdot(1-sen^2(y))-(1-sen^2(x))\cdot sen^2(y)$$

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)-sen^2(x)\cdot sen^2(y)-sen^2(y)+sen^2(x)\cdot sen^2(y)$$

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)-sen^2(y) \quad \rightarrow \text{c.q.d.}$$

2. Sabiendo que $sen(x)=\frac{2}{3}$, siendo x un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $sen(x)=\frac{2}{3}$ → por la relación fundamental → $\cos(x)=\pm\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

Tomamos el valor $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ por ser x del primer cuadrante.

$$sen(2x)=2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{9}$$

b) $\cos(\frac{x}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$

Tomamos el valor positivo porque la mitad de un ángulo del primer cuadrante, seguirá siendo del primer cuadrante.

$$\cos(\frac{x}{2})=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

c) $tg(2x)=\frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}$, $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$

$$tg(2x)=\frac{2\cdot\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}}{1-(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}}{\frac{25-20}{25}}=4\cdot\sqrt{5}$$

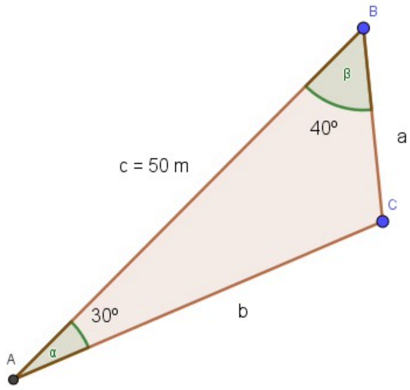
3. Demuestra $\tan(A)+\tan(B)=\dfrac{sen(A+B)}{\cos(A)\cos(B)}$

$sen(A+B)=sen(A)\cos(B)+\cos(A)sen(B)$ → Sustituimos esta expresión en el segundo miembro de la igualdad

$\dfrac{sen(A)\cos(B)+\cos(A)sen(B)}{\cos(A)\cos(B)}=\dfrac{sen(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)}+\dfrac{\cos(A)sen(B)}{\cos(A)\cos(B)}$ → Simplificamos

$\dfrac{sen(A)\cancel{\cos(B)}}{\cos(A)\cancel{\cos(B)}}+\dfrac{\cancel{\cos(A)}sen(B)}{\cancel{\cos(A)}\cos(B)}=\dfrac{sen(A)}{\cos(A)}+\dfrac{sen(B)}{\cos(B)}=tg(A)+tg(B)$ → c.q.d.

4. Un terreno triangular tiene 50m de longitud en uno de sus lados. Los otros dos lados forman con el de 50m, ángulos de 40º y 30º. Calcula las longitudes de los lados. Haz un dibujo que ilustre los datos del enunciado.



Datos del enunciado: $\hat{A}=30º$, $\hat{B}=40º$ → Como la suma de lo ángulos interiores de un triángulo debe ser 180º → $\hat{C}=180º-30º-40º=110º$

Usamos el teorema del seno:

$\dfrac{a}{sen(\hat{A})}=\dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$ → $\dfrac{a}{sen(30º)}=\dfrac{50}{sen(110º)}$ → $a=26{,}6\,m$

$\dfrac{b}{sen(\hat{B})}=\dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$ → $\dfrac{b}{sen(40º)}=\dfrac{50}{sen(110º)}$ → $b=34{,}2\,m$

5. Resuelve $tg(x)\cdot sec(x)=\sqrt{2}$

$tg(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$, $sec(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$ → Sustituimos en la ecuación → $\dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)}=\sqrt{2}$

$\dfrac{sen(x)}{1-sen^2(x)}=\sqrt{2}$ → $sen(x)=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,sen^2(x)$ → $\sqrt{2}\,sen^2(x)+sen(x)-\sqrt{2}=0$

Cambio variable $sen(x)=t$ → $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$ → $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-1\pm 3}{2\sqrt{2}}$

$t_1=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$, $t_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Deshacemos el cambio de variable → $sen(x)=-\sqrt{2}$ → No hay solución, porque la imagen del seno está acotada el intervalo $[-1,1]$

$sen(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ → Solución: $x=45º+360º\text{k}\,,\,x=135º+360º\text{k}\,,\,k\in\mathbb{R}$

6. Sabiendo que $cotg(x)=\frac{-1}{4}$ y que x es un ángulo del segundo cuadrante, deduce los siguientes apartados empleando las relaciones trigonométricas estudiadas en el tema.

a) $cosec(x)$ → De la relación fundamental de trigonometría → $sen^2(x)+\cos^2(x)=1$ → Dividimos todo por $sen^2(x)$ → $1+cotg^2(x)=cosec^2(x)$ → $1+\frac{1}{16}=cosec^2(x)$ → $\pm\sqrt{\frac{17}{16}}=cosec(x)$ → Elegimos el signo positivo, porque el ángulo está en el segundo cuadrante → $cosec(x)=\frac{\sqrt{17}}{4}$

b) $\cos(2x)$ → Del apartado anterior $cosec(x)=\frac{\sqrt{17}}{4}$ → $sen(x)=\frac{4\sqrt{17}}{17}$ → De la relación fundamental de trigonometría → $\cos(x)=\pm\sqrt{1-sen^2(x)}$ → Nos quedamos con el signo negativo, porque el ángulo está en el segundo cuadrante → $\cos(x)=\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\sqrt{\frac{1}{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$

De la fórmula del coseno del ángulo doble → $\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)=\frac{1}{17}-\frac{16}{17}=\frac{-15}{17}$