Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 12 - Todos resueltos

Hoja 12. Problema 1

1. Demuestra la siguiente igualdad $sen(x+y)sen(x-y)=sen^2 x-sen^2 y$

Desarrollamos el seno de la suma y el seno de la diferencia.

$$sen(x+y)=sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y) \quad , \quad sen(x-y)=sen(x)\cos(y)-\cos(x)sen(y)$$

Multiplicamos ambas expresiones, tal y como aparece en el término izquierdo de la igualdad de partida.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=[sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y)]\cdot[sen(x)\cos(y)-\cos(x)sen(y)]$$

Operamos el producto suma por diferencia, igual a diferencia de cuadrados.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)\cdot\cos^2(y)-\cos^2(x)\cdot sen^2(y)$$

De la relación fundamental de trigonometría tenemos:

$$\cos^2(y)=1-sen^2(y) \quad , \quad \cos^2(x)=1-sen^2(x)$$

Sustituimos y operamos.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)\cdot(1-sen^2(y))-(1-sen^2(x))\cdot sen^2(y)$$

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)-sen^2(x)\cdot sen^2(y)-sen^2(y)+sen^2(x)\cdot sen^2(y)$$

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)-sen^2(y) \quad \rightarrow \text{c.q.d.}$$

Hoja 12. Problema 2

2. Resuelve $\cos x - sen^2(\frac{x}{2}) = 1$

Usamos la expresión del seno del ángulo mitad.

$$sen(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \quad \rightarrow \quad sen^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$

Sustituimos.

$$\cos(x) - \frac{1-\cos(x)}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad 2\cdot\cos(x) - 1 + \cos(x) = 2 \quad \rightarrow \quad 3\cdot\cos(x) = 3$$

$$\cos(x) = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0º + 360º\, k \,,\, k \in \mathbb{Z}$$

Hoja 12. Problema 3

3. Sabiendo que $sen(x)=\frac{2}{3}$ **, siendo** x **un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $sen(2x)$ **b)** $\cos(\frac{x}{2})$ **c)** $tg(2x)$

a) $sen(x)=\frac{2}{3}$ → por la relación fundamental → $\cos(x)=\pm\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

Tomamos el valor $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ por ser x del primer cuadrante.

$$sen(2x)=2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{9}$$

b) $\cos(\frac{x}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$

Tomamos el valor positivo porque la mitad de un ángulo del primer cuadrante, seguirá siendo del primer cuadrante.

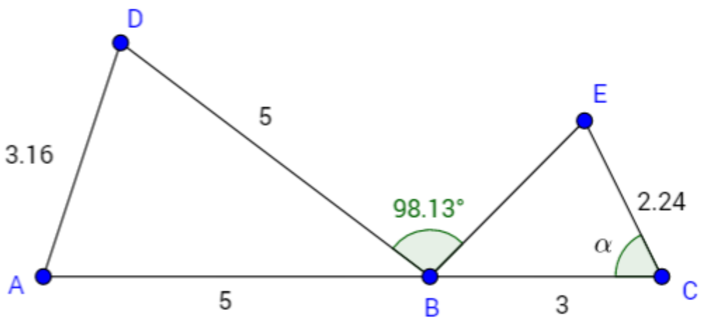
$$\cos(\frac{x}{2})=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

c) $tg(2x)=\frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}$, $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$

$$tg(2x)=\frac{2\cdot\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}}{1-(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}}{\frac{25-20}{25}}=4\cdot\sqrt{5}$$

Hoja 12. Problema 4

4. Obtener el ángulo α de la figura sabiendo que el vértice $\hat{E}<90º$.



Si en el triángulo BEC obtengo el vértice B , podré aplicar el teorema del seno para conseguir el vértice E y finalmente el vértice C que genera el ángulo α .

En el primer triángulo ADB puedo obtener el vértice B por el teorema del coseno.

$$(3{,}16)^2=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\cos(B) \rightarrow 9{,}986=50-50\cdot\cos(B) \rightarrow -40{,}014=-50\cdot\cos(B)$$
$$0{,}8=\cos(B) \rightarrow B=36{,}84^o$$

Es un ángulo del primer cuadrante, ya que el ángulo del cuarto cuadrante que comparte el mismo coseno no tiene sentido por no poder ser mayor de los 180º que forman la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Por lo tanto el vértice B del triángulo pequeño BEC resulta:

$$B=180º-98{,}13^o-36{,}84^o=45{,}03^o$$

Aplicamos el teorema del seno al triángulo BEC para obtener el vértice E .

$$\frac{2{,}24}{sen(45{,}03^o)}=\frac{3}{sen(E)} \rightarrow sen(E)=\frac{3\cdot sen(45{,}03^o)}{2{,}24}=0{,}948$$

$E=71{,}35^o$, $E=108{,}65^o$ → Elegimos $E=71{,}35^o$ por la condición del enunciado que afirma $\hat{E}<90º$.

Y el ángulo α requerido resulta:

$$\alpha=180º-71{,}35^o-45{,}03^o=63{,}62^o$$

Hoja 12. Problema 5

5. Resuelve $tg(2x) = cotg(x)$

Usamos la expresión de la tangente del ángulo doble.

$$tg(2x) = \frac{2\,tg(x)}{1 - tg^2(x)}$$

Sustituimos en la igualdad de partida, recordando que $cotg(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$.

$$\frac{2\,tg(x)}{1 - tg^2(x)} = \frac{1}{tg(x)} \quad \rightarrow \quad 2\,tg^2(x) = 1 - tg^2(x) \quad \rightarrow \quad 3\,tg^2(x) = 1 \quad \rightarrow \quad tg^2(x) = \frac{1}{3}$$

$$tg(x) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad x = 30^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x = 210^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x = 30^\circ + 180^\circ k\,,\, k \in \mathbb{Z}$$

$$tg(x) = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad x = -30^\circ = 330^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x = 150^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x = 150^\circ + 180^\circ k\,,\, k \in \mathbb{Z}$$

Hoja 12. Problema 6

6. Sabiendo que $sen(\alpha)=\frac{5}{13}$ **y que** α **es un ángulo del segundo cuadrante, deduce:**

a) $\cos(\alpha)$ **b)** $cotg(\alpha)$ **c)** $cosec(\alpha)$

a) $sen(\alpha)=\frac{5}{13}$ → de la relación fundamental → $\cos(\alpha)=\pm\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\pm\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{\pm 12}{13}$

Tomamos la solución negativa $\cos(\alpha)=\frac{-12}{13}$ por ser del segundo cuadrante.

b) $cotg(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}=\frac{\frac{-12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{-12}{5}$

c) $cosec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}=\frac{13}{5}$