Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 11 - Todos resueltos

Hoja 11. Problema 1

1. Demuestra la siguiente igualdad $cotg^2(x)-\cos^2(x)=cotg^2(x)\cdot\cos^2(x)$ **.**

Expresamos la cotangente como cociente entre coseno y seno.

$$\frac{\cos^2(x)}{sen^2(x)}-\cos^2(x)=\frac{\cos^2(x)\cdot\cos^2(x)}{sen^2(x)}$$

Operamos.

$$\frac{\cos^2(x)-sen^2(x)\cdot\cos^2(x)}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}$$

En el numerador del término de la izquierda sacamos factor común de coseno cuadrado.

$$\frac{\cos^2(x)[1-sen^2(x)]}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}$$

De la relación fundamental → $1-sen^2(x)=\cos^2(x)$ → Sustituimos.

$$\frac{\cos^2(x)\cdot\cos^2(x)}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)} \rightarrow \frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}$$ → c.q.d.

Hoja 11. Problema 2

2. Resuelve $4 \cdot sen^2(x)+2 \cdot \cos(x)=4$ **.**

Usamos la relación fundamental para expresar $sen^2(x)=1-\cos^2(x)$.

$$4 \cdot (1-\cos^2(x))+2 \cdot \cos(x)=4 \rightarrow 4-4 \cdot \cos^2(x)+2 \cdot \cos(x)=4$$
$$-4 \cdot \cos^2(x)+2 \cdot \cos(x)=0 \rightarrow -2 \cdot \cos^2(x)+\cos(x)=0$$

Sacamos factor común de coseno.

$$\cos(x)[-2 \cdot \cos(x)+1]=0$$

Igualamos cada factor a cero.

$$\cos(x)=0 \rightarrow x=90º, 270º, \ldots \rightarrow x=90º+180º k, k \in \mathbb{Z}$$
$$-2 \cdot \cos(x)+1=0 \rightarrow \cos(x)=\frac{1}{2} \rightarrow x=60º+360º k, k \in \mathbb{Z} \quad , \quad x=300º+360º k, k \in \mathbb{Z}$$

Hoja 11. Problema 3

3. Sabiendo que $\cos(\alpha)=\frac{-1}{3}$ **y** $sen(\alpha)=\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}$ **obtener:**

a) α

b) $\cos(2\alpha)$ **(No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria)**

c) $tg(2\alpha)$ **(No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria)**

a) Coseno negativo y seno negativo genera un ángulo del tercer cuadrante.
Usando la calculadora → $\alpha=109{,}47^o$ pertenece al segundo cuadrante.

$$180º-109{,}47^o=70{,}53^o$$

Por lo tanto, en el tercer cuadrante → $180º+70{,}53^o=250{,}53^o$ del tercer cuadrante.

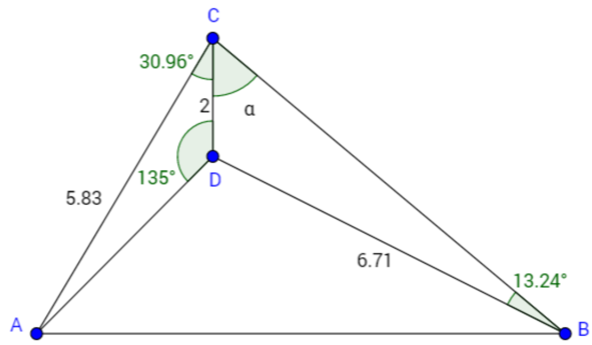
b) $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)=\left(\frac{-1}{3}\right)^2-\left(\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=\frac{-7}{9}$

c) $tg(2\alpha)=\frac{2\cdot tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$, $tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}}{\frac{-1}{3}}=2\cdot\sqrt{2}$

$$tg(2\alpha)=\frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{1-(2\cdot\sqrt{2})^2}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{1-8}=\frac{-4\cdot\sqrt{2}}{7}$$

Hoja 11. Problema 4

4. Obtener la distancia $\overline{AB}$ en la siguiente figura sabiendo que $\alpha<90^{o}$.



Si en el triángulo ADB conseguimos el valor del vértice D y el valor del lado AD podremos aplicar el teorema del coseno para obtener la longitud $\overline{AB}$.

En el triángulo ACD podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{5{,}83}{sen(135^{o})}=\frac{\overline{AD}}{sen(30{,}96^{o})} \rightarrow \overline{AD}=\frac{5{,}83\cdot sen(30{,}96^{o})}{sen(135^{o})} \rightarrow \overline{AD}\simeq 4{,}24...$$

En el triángulo CDB podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{2}{sen(13{,}24^{o})}=\frac{6{,}71}{sen(\alpha)} \rightarrow sen(\alpha)=\frac{6{,}71\cdot sen(13{,}24^{o})}{2} \rightarrow sen(\alpha)=0{,}768$$

$\alpha\simeq 50{,}21^{o}$ $\rightarrow$ Donde hemos considerado el dato del enunciado $\alpha<90^{o}$.

En el triángulo CDB el vértice $D=180^{o}-(50{,}21^{o}+13{,}24^{o})=116{,}55^{o}$

En el triangulo ADB el vértice $D=360^{o}-116{,}55^{o}-135^{o}=108{,}45^{o}$

Y podemos aplicar el teorema del coseno en el triángulo ADB para obtener $\overline{AB}$.

$$(\overline{AB})^2=(6{,}71)^2+(4{,}24)^2-2\cdot 6{,}71\cdot 4{,}24\cdot\cos(108{,}45^{o}) \rightarrow (\overline{AB})^2=81 \rightarrow \overline{AB}=9$$

Hoja 11. Problema 5

5. Resuelve $sen(x)+\cos^2 x-sen^2 x=4\cdot sen^2 x$ **.**

De la relación fundamental → $\cos^2(x)=1-sen^2(x)$. Sustituimos.

$$sen(x)+1-sen^2 x-sen^2 x=4\cdot sen^2 x \rightarrow sen(x)+1-2sen^2 x=4\cdot sen^2 x$$
$$6\cdot sen^2 x-sen(x)-1=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$sen(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12} \rightarrow sen(x)=\frac{1}{2} \quad , \quad sen(x)=\frac{-1}{3}$$

$$sen(x)=\frac{1}{2} \rightarrow x=30^{o}+360^{o}k\,,k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=150^{o}+360^{o}k\,,k\in\mathbb{Z}$$

$$sen(x)=\frac{-1}{3} \rightarrow x=-19{,}47^{o}=340{,}53^{o}+360^{o}k\,,k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=199{,}47^{o}+360^{o}\text{k}\,,k\in\mathbb{Z}$$

Hoja 11. Problema 6

6. Resuelve de manera razonada. No utilizar calculadora y dejar el resultado final en forma fraccionaria.

a) Obtener $\cos(135º)$ **utilizando el dato** $\cos(45º)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.**

b) Obtener $\cos(120º)$ **utilizando el dato** $sen(30º)=\frac{1}{2}$ **.**

c) Obtener $\cos(210º)$ **utilizando el dato** $sen(30º)=\frac{1}{2}$ **.**

a) $135º=180º-45º$ $\rightarrow$ La proyección de $135º$ sobre el eje horizontal, en la circunferencia goniométrica, es igual en valor absoluto a la proyección de $45º$ sobre el eje horizontal y cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\cos(135º)=-\cos(45º)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

b) $120º=90º+30º$ $\rightarrow$ La proyección de $120º$ sobre el eje horizontal, en la circunferencia goniométrica, es igual en valor absoluto a la proyección de $30º$ sobre el eje vertical y cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\cos(120º)=-sen(30º)=\frac{-1}{2}$$

c) $sen(30º)=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\cos(30º)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

La proyección de $210º$ sobre el eje horizontal, en la circunferencia goniométrica, es igual en valor absoluto a la proyección de $30º$ sobre el eje horizontal y cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\cos(210º)=-\cos(30º)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$