

Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 11 - Todos resueltos

Hoja 11. Problema 1

1. Demuestra la siguiente igualdad $\cotg^2(x) - \cos^2(x) = \cotg^2(x) \cdot \cos^2(x)$.

Expresamos la cotangente como cociente entre coseno y seno.

$$\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \cos^2(x) = \frac{\cos^2(x) \cdot \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

Operamos.

$$\frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

En el numerador del término de la izquierda sacamos factor común de coseno cuadrado.

$$\frac{\cos^2(x)[1 - \operatorname{sen}^2(x)]}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

De la relación fundamental $\rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x) \rightarrow$ Sustituimos.

$$\frac{\cos^2(x) \cdot \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \rightarrow \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \rightarrow \text{c.q.d.}$$

Hoja 11. Problema 2

2. Resuelve $4 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \cos(x) = 4$.

Usamos la relación fundamental para expresar $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

$$4 \cdot (1 - \cos^2(x)) + 2 \cdot \cos(x) = 4 \rightarrow 4 - 4 \cdot \cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x) = 4$$

$$-4 \cdot \cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x) = 0 \rightarrow -2 \cdot \cos^2(x) + \cos(x) = 0$$

Sacamos factor común de coseno.

$$\cos(x)[-2 \cdot \cos(x) + 1] = 0$$

Igualamos cada factor a cero.

$$\cos(x) = 0 \rightarrow x = 90^\circ, 270^\circ, \dots \rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2 \cdot \cos(x) + 1 = 0 \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Hoja 11. Problema 3

3. Sabiendo que $\cos(\alpha) = \frac{-1}{3}$ y $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3}$ obtener:

- α
- $\cos(2\alpha)$ (No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria)
- $\operatorname{tg}(2\alpha)$ (No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria)

a) Coseno negativo y seno negativo genera un ángulo del tercer cuadrante.

Usando la calculadora $\rightarrow \alpha = 109,47^\circ$ pertenece al segundo cuadrante.

$$180^\circ - 109,47^\circ = 70,53^\circ$$

Por lo tanto, en el tercer cuadrante $\rightarrow 180^\circ + 70,53^\circ = 250,53^\circ$ del tercer cuadrante.

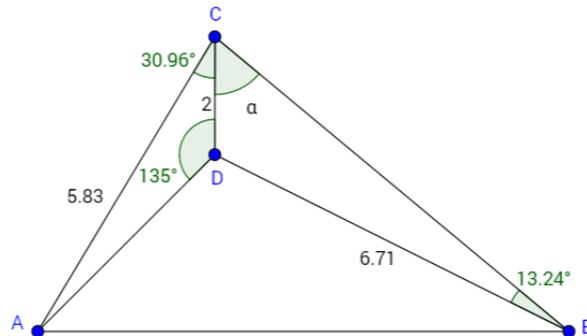
$$\text{b) } \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = \frac{-7}{9}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}, \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3}}{\frac{-1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{1 - (2 \cdot \sqrt{2})^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{1 - 8} = \frac{-4 \cdot \sqrt{2}}{7}$$

Hoja 11. Problema 4

4. Obtener la distancia \overline{AB} en la siguiente figura sabiendo que $\alpha < 90^\circ$.



Si en el triángulo ADB conseguimos el valor del vértice D y el valor del lado AD podremos aplicar el teorema del coseno para obtener la longitud \overline{AB} .

En el triángulo ACD podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{5,83}{\text{sen}(135^\circ)} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen}(30,96^\circ)} \rightarrow \overline{AD} = \frac{5,83 \cdot \text{sen}(30,96^\circ)}{\text{sen}(135^\circ)} \rightarrow \overline{AD} \approx 4,24\dots$$

En el triángulo CDB podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{2}{\text{sen}(13,24^\circ)} = \frac{6,71}{\text{sen}(\alpha)} \rightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{6,71 \cdot \text{sen}(13,24^\circ)}{2} \rightarrow \text{sen}(\alpha) = 0,768$$

$$\alpha \approx 50,21^\circ \rightarrow \text{Donde hemos considerado el dato del enunciado } \alpha < 90^\circ.$$

En el triángulo CDB el vértice $D = 180^\circ - (50,21^\circ + 13,24^\circ) = 116,55^\circ$

En el triángulo ADB el vértice $D = 360^\circ - 116,55^\circ - 135^\circ = 108,45^\circ$

Y podemos aplicar el teorema del coseno en el triángulo ADB para obtener \overline{AB} .

$$(\overline{AB})^2 = (6,71)^2 + (4,24)^2 - 2 \cdot 6,71 \cdot 4,24 \cdot \cos(108,45^\circ) \rightarrow (\overline{AB})^2 = 81 \rightarrow \overline{AB} = 9$$

Hoja 11. Problema 5

5. Resuelve $\operatorname{sen}(x) + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x$.

De la relación fundamental $\rightarrow \cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$. Sustituimos.

$$\operatorname{sen}(x) + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \operatorname{sen}(x) + 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x$$
$$6 \cdot \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}(x) - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} \rightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \text{ , } \operatorname{sen}(x) = \frac{-1}{3}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \text{ , } x = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{-1}{3} \rightarrow x = -19,47^\circ = 340,53^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \text{ , } x = 199,47^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Hoja 11. Problema 6

6. Resuelve de manera razonada. No utilizar calculadora y dejar el resultado final en forma fraccionaria.

a) **Obtener** $\cos(135^\circ)$ **utilizando el dato** $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) **Obtener** $\cos(120^\circ)$ **utilizando el dato** $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

c) **Obtener** $\cos(210^\circ)$ **utilizando el dato** $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

a) $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ \rightarrow$ La proyección de 135° sobre el eje horizontal, en la circunferencia goniométrica, es igual en valor absoluto a la proyección de 45° sobre el eje horizontal y cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\cos(135^\circ) = -\cos(45^\circ) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

b) $120^\circ = 90^\circ + 30^\circ \rightarrow$ La proyección de 120° sobre el eje horizontal, en la circunferencia goniométrica, es igual en valor absoluto a la proyección de 30° sobre el eje vertical y cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\cos(120^\circ) = -\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{-1}{2}$$

c) $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} \rightarrow \cos(30^\circ) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La proyección de 210° sobre el eje horizontal, en la circunferencia goniométrica, es igual en valor absoluto a la proyección de 30° sobre el eje horizontal y cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\cos(210^\circ) = -\cos(30^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$