

Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 10 - Problemas 1, 2, 3, 4

Hoja 10. Problema 1

1. Sabiendo que $\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{-7}{4}$ y que α es un ángulo del cuarto cuadrante, deduce los siguientes apartados sin utilizar la calculadora. Si es necesario deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales):

- a) $\sec(\alpha)$
- b) $\operatorname{tg}(2\alpha)$

$$\text{a) } \operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{-4}{7}$$

De la relación fundamental $\rightarrow 1 = \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)$

$$1 = \cos^2(\alpha) + \frac{16}{49} \rightarrow \cos(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{49}} \rightarrow \cos(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{33}{49}} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\pm \sqrt{33}}{7}$$

El enunciado afirma que α es del cuarto cuadrante, por lo que nos quedamos con el valor positivo del coseno $\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{33}}{7}$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \rightarrow \sec(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{33}} \rightarrow \sec(\alpha) = \frac{7 \cdot \sqrt{33}}{33}$$

b) Para obtener $tg(2\alpha)$ primero vamos a obtener $tg(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$

$$tg(\alpha) = \frac{-4}{\sqrt{33}} \rightarrow tg(\alpha) = \frac{-4 \cdot \sqrt{33}}{33}$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)} \rightarrow tg(2\alpha) = \frac{\frac{-8 \cdot \sqrt{33}}{33}}{1 - \frac{16}{33}} = \frac{-8 \cdot \sqrt{33}}{17}$$

Hoja 10. Problema 2

2. Demuestra la siguiente igualdad $\frac{\operatorname{sen}(x+x)}{\cos(x+x)-1} = -\operatorname{cotg} x$

Usamos las relaciones del seno del ángulo doble y del coseno del ángulo doble, y la relación fundamental de trigonometría.

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$1 = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$$

Sustituimos en la igualdad de partida.

$$\frac{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cotg}(x) \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)}{-2 \operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cotg}(x)$$

$$\frac{\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{cotg}(x) \rightarrow -\operatorname{cotg}(x) = -\operatorname{cotg}(x) \rightarrow \text{c.q.d.}$$

Hoja 10. Problema 3

3. Siendo α y β dos ángulos del tercer cuadrante que cumplen $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-2}{5}$, $\operatorname{cos} \beta = \frac{-1}{3}$, calcula las siguientes expresiones trigonométricas sin usar la calculadora. Si es necesario, deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales).

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

b) $\operatorname{cos}(\alpha - \beta)$

a) Al desarrollar el seno de la suma vamos a necesitar los valores de los senos y cosenos de los ángulos de partida. Para esto, usamos la relación fundamental de trigonometría.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{-2}{5} \rightarrow \text{usamos relación fundamental } 1 = \operatorname{cos}^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)} \rightarrow \operatorname{cos}(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{25}} \rightarrow \operatorname{cos}(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{21}{25}} \rightarrow \operatorname{cos}(\alpha) = \frac{\pm \sqrt{21}}{5}$$

Nos quedamos con la opción negativa por pertenecer al tercer cuadrante .

$$\operatorname{cos}(\alpha) = \frac{-\sqrt{21}}{5}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{-1}{3} \rightarrow \operatorname{sen}(\beta) = \pm \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2(\beta)} \rightarrow \operatorname{sen}(\beta) = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \rightarrow \operatorname{sen}(\beta) = \frac{\pm \sqrt{8}}{3}$$

Nos quedamos con la opción negativa por pertenecer al tercer cuadrante .

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{-\sqrt{8}}{3}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{-2}{5} \cdot \frac{-1}{3} + \frac{-\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{-\sqrt{8}}{3} = \frac{2 + \sqrt{168}}{15}$$

b) $\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{-\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{-1}{3} - \frac{-2}{5} \cdot \frac{-\sqrt{8}}{3} = \frac{\sqrt{21} - 2\sqrt{8}}{15}$

Hoja 10. Problema 4

4. Resuelve $\operatorname{sen}(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

Debemos obtener el valor de x . Y podemos plantearlo de varias maneras: expresando todo en función del seno, o bien en función del coseno, o bien planteando la razón tangente.

Si expresamos el seno en función del coseno.

$$\operatorname{sen}(x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

Sustituimos en la igualdad de partida.

$$\pm \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{2}$$

Elevamos al cuadrado.

$$1 - \cos^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{4} \rightarrow 1 = \frac{\cos^2(x)}{4} + \cos^2(x) \rightarrow \cos^2(x) = \frac{4}{5} \rightarrow \cos(x) = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Despejamos el ángulo x aplicando arccoseno.

$$\cos(x) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow x = 29,517^\circ + 360^\circ k, \quad x = 330,483^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \rightarrow x = 180^\circ - 29,517^\circ = 150,483^\circ + 360^\circ k, \quad x = 210,517^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$