

Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 1 - Problemas 1, 2, 3, 4

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Fermín Roldán (noviembre 2014)

1. Sabiendo que α y β dos ángulos del primer cuadrante que cumplen:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{5}{13}$$

Calcular las siguientes razones trigonométricas:

- a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$
- b) $\cos(\alpha - \beta)$
- c) $\operatorname{tg}(2\alpha)$
- d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)$
- e) $\operatorname{tg}(\alpha)$

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$

De la relación fundamental sabemos que el ángulo α cumple:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Por lo tanto $\rightarrow \cos \alpha = \pm \left(\frac{4}{5}\right) \rightarrow$ como el ángulo es del primer cuadrante $\rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$

Razonando de manera análoga para el ángulo β :

$$1 = \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

Por lo tanto $\rightarrow \operatorname{sen} \beta = \pm \left(\frac{12}{13}\right) \rightarrow$ como el ángulo es del primer cuadrante $\rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13}$

Solución $\rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) = \frac{63}{65}$

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{56}{65}$

c) $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{24}{7}$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{13}}{13} \rightarrow$ primer cuadrante $\rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}$

e) $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3}{4}$

Hoja 1. Problema 2

Resuelto por Inés Delgado (noviembre 2014)

2. Calcula a partir de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° .

a) $\text{sen } 15^\circ$

b) $\text{cos } 75^\circ$

c) $\text{tg } 120^\circ$

a) $\text{sen}(15^\circ) \rightarrow$ aplicamos la fórmula del seno de la suma

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \text{cos } b + \text{cos } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{sen } 15^\circ = \text{sen}(45^\circ - 30^\circ)$$

$$\text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \text{sen}[45^\circ + (-30^\circ)] = \text{sen } 45^\circ \text{cos}(-30^\circ) + \text{cos}(45^\circ) \text{sen}(-30^\circ)$$

Sustituimos $\text{cos}(-30^\circ) = \text{cos}(30^\circ)$, por ser el coseno función par.

Y sustituimos $\text{sen}(-30^\circ) = -\text{sen}(30^\circ)$, por ser el seno función impar.

Solución $\rightarrow \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \text{cos } 30^\circ - \text{cos } 45^\circ \text{sen } 30^\circ \simeq 0,2588\dots$

b) $\text{cos } 75^\circ \rightarrow$ los ángulos 75° y 15° son complementarios, es decir, suman 90° .

Para ángulos complementarios se cumple $\text{cos } 75^\circ = \text{sen } 15^\circ$. Tomando la solución del apartado anterior:

Solución $\rightarrow \text{cos } 75^\circ = \text{sen } 15^\circ \simeq 0,2588\dots$

c) $\text{tg } 120^\circ \rightarrow$ Los ángulos 120° y 60° son suplementarios, es decir, suman 180° .

Los ángulos suplementarios tienen el mismo valor del seno (misma proyección sobre el eje vertical en la circunferencia de radio unidad), y coseno opuestos. Por lo tanto, las tangentes son opuestas.

Solución $\rightarrow \text{tg } 120^\circ = -\text{tg } 60^\circ \simeq -1,732\dots$

Hoja 1. Problema 3

Resuelto por Javier de Orbe (noviembre 2014)

3. Comprueba las siguientes igualdades:

a) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x$

b) $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

c) $\operatorname{tg}(3x) = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} &\rightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1+(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} \rightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2\cos^2 x} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos x} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \operatorname{tg}(x) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen}(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x-y) = (\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y) \cdot (\operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y)$

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y - \operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 y$$

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 y) - (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen}^2 y$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y \quad \text{c.q.d.}$$

c) $\operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg}(2x+x) = \frac{\operatorname{tg}(2x) + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{tg} x}$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \operatorname{tg} x} &= \frac{\frac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\frac{(1-\operatorname{tg}^2 x) - 2\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2 x}} \rightarrow \frac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x} \rightarrow \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Hoja 1. Problema 4

Resuelto por Inés Delgado (noviembre 2014)

4. Sabiendo que $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$, calcula el valor de $\operatorname{sen}(3x)$ y de $\operatorname{sen}(4x)$.

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}(3x) \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 450^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \operatorname{sen}(3x) = 1$$

$$\operatorname{sen}(4x) \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 600^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \operatorname{sen}(4x) = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$