Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 1- Problemas 1, 2, 3, 4

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Fermín Roldán (noviembre 2014)

1. Sabiendo que α y β dos ángulos del primer cuadrante que cumplen:

$sen\,\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$

Calcular las siguientes razones trigonométricas:

a) $sen(\alpha+\beta)$

b) $\cos(\alpha-\beta)$

c) $tg(2\alpha)$

d) $sen(\frac{\beta}{2})$

e) $tg(\alpha)$

a) $sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$

De la relación fundamental sabemos que el ángulo α cumple:

$$1=sen^2\alpha+\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad \cos^2\alpha=1-sen^2\alpha \quad\rightarrow\quad \cos^2\alpha=1-(\frac{3}{5})^2$$

Por lo tanto → $\cos\alpha=\pm(\frac{4}{5})$ → como el ángulo es del primer cuadrante → $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Razonando de manera análoga para el ángulo β:

$$1 = sen^2\beta + \cos^2\beta \;\rightarrow\; sen^2\beta = 1 - \cos^2\beta \;\rightarrow\; sen^2\beta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

Por lo tanto → $sen\,\beta = \pm\left(\frac{12}{13}\right)$ → como el ángulo es del primer cuadrante → $sen\,\beta = \frac{12}{13}$

Solución → $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + sen(\beta)\cos(\beta) = \frac{63}{65}$

b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\,\alpha\cdot sen\,\beta = \frac{56}{65}$

c) $tg(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \left(\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{24}{7}$

d) $sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \frac{\pm 2\cdot\sqrt{13}}{13}$ → primer cuadrante → $sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{13}}{13}$

e) $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3}{4}$

Hoja 1. Problema 2

Resuelto por Inés Delgado (noviembre 2014)

2. Calcula a partir de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 30º, 45º y 60º.

a) sen 15º

b) cos 75º

c) tg 120º

a) $sen(15^o)$ → aplicamos la formula del seno de la suma

$$sen(a+b)=sen\,a\cdot\cos b+\cos a\cdot sen\,b$$
$$sen\,15^o=sen(45^o-30^o)$$
$$sen(45^o-30^o)=sen[45^o+(-30^o)]=sen\,45^o\cos(-30^o)+\cos(45^o)\,sen(-30^o)$$

Sustituimos $\cos(-30^o)=\cos(30^o)$, por ser el coseno función par.

Y sustituimos $sen(-30^o)=-sen(30^o)$, por ser el seno función impar.

Solución → $sen(45^o-30^o)=sen\,45^o\cos 30^o-\cos 45^o\,sen\,30^o\simeq 0{,}2588...$

b) $\cos 75^o$ → los ángulos 75º y 15º son complementarios, es decir, suman 90º.

Para ángulos complementarios se cumple $\cos 75^o=sen\,15^o$. Tomando la solución del apartado anterior:

Solución → $\cos 75^o=sen\,15^o\simeq 0{,}2588...$

c) $tg\,120^o$ → Los ángulos 120º y 60º son suplementarios, es decir, suman 180º.

Los ángulos suplementarios tienen el mismo valor del seno (misma proyección sobre el eje vertical en la circunferencia de radio unidad), y coseno opuestos. Por lo tanto, las tangentes son opuestas.

Solución → $tg\,120^o=-tg\,60^o\simeq -1{,}732...$

Hoja 1. Problema 3

Resuelto por Javier de Orbe (noviembre 2014)

3. Comprueba las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{sen(2x)}{1+\cos(2x)}=\tan x$

b) $sen(x+y)\,sen(x-y)=sen^2 x-sen^2 y$

c) $tg(3x)=\dfrac{3\,tg\,x-tg^3 x}{1-3\,tg^2 x}$

a) $\dfrac{sen(2x)}{1+\cos(2x)} \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x}{1+(\cos^2 x-sen^2 x)} \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x}{(sen^2 x+\cos^2 x)+(\cos^2 x-sen^2 x)} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x}{2\cos^2 x} \rightarrow \dfrac{sen\,x\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos x} \rightarrow \dfrac{sen\,x}{\cos x} \rightarrow tg(x)$ c.q.d.

b) $sen(x+y)\cdot sen(x-y)=(sen\,x\cdot\cos y+\cos x\cdot sen\,y)\cdot(sen\,x\cdot\cos y-\cos x\cdot sen\,y)$

$sen^2 x\cos^2 y-sen\,x\cdot\cos y\cdot\cos x\cdot sen\,y+\cos x\cdot sen\,y\cdot sen\,x\cdot\cos y-\cos^2 x\,sen^2 y$

$sen^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\,sen^2 y=sen^2 x(1-sen^2 y)-(1-sen^2 x)\,sen^2 y$

$sen^2 x-sen^2 x\,sen^2 y-sen^2 y+sen^2 x\,sen^2 y$

$sen^2 x-sen^2 y$ c.q.d.

c) $tg(3x)=tg(2x+x)=\dfrac{tg(2x)+tg\,x}{1-tg(2x)\cdot tg\,x}$

$$\frac{\dfrac{2tg\,x}{1-tg^2 x}+tg\,x}{1-\dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2 x}tg\,x}=\frac{\dfrac{2\,tg\,x+tg\,x(1-tg^2 x)}{1-tg^2 x}}{\dfrac{(1-tg^2 x)-2tg(x)\cdot tg(x)}{1-tg^2 x}} \rightarrow \frac{2\,tg\,x+tg\,x-tg^3 x}{1-tg^2 x-2tg^2 x} \rightarrow \frac{3tg\,x-tg^3 x}{1-3\,tg^3 x}$$ c.q.d.

Hoja 1. Problema 4

Resuelto por Inés Delgado (noviembre 2014)

4. Sabiendo que $sen(x)=\frac{1}{2}$ **, calcula el valor de** $sen(3x)$ **y de** $sen(4x)$ **.**

$sen(x)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x=30º+360º\cdot k, k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=150º+360º\cdot k, k\in\mathbb{Z}$

$sen(3x) \quad \rightarrow \quad x=90º+360º\cdot k, k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=450º+360º\cdot k, k\in\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad sen(3\text{x})=1$

$sen(4x) \quad \rightarrow \quad x=120º+360º\cdot k, k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=600º+360º\cdot k, k\in\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad sen(4\text{x})=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$