

Teoría – Tema 1

Propiedades de funciones elementales. Ejemplos exponencial y logaritmo

Índice de contenido

Dominio de una función.....	2
Rango o recorrido de una función.....	3
Simetría.....	4
Periodicidad.....	5
Composición de funciones.....	6
Función exponencial.....	7
Función logaritmo.....	8

■ Dominio de una función

El dominio de una función $f(x)$ está formado por todos los elementos que poseen imagen.

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$$

Función polinómica $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$

Función racional $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{\text{valores que anulan denominador}\}$

Función radical de índice impar \rightarrow El dominio coincide con el dominio de la función radicando.

Función radical de índice par \rightarrow El dominio está formado por todos los valores del dominio del radicando que hacen que este sea mayor o igual que cero.

Función logarítmica \rightarrow El dominio son todos los valores que cumplen que la función contenida dentro del logaritmo sea mayor que cero.

Función polinómica $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$

Función seno $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$

Función coseno $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$

Función tangente $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

Función cotangente $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Función secante $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

Función cosecante $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Suma, resta producto de funciones \rightarrow El dominio es la intersección de los dominios de cada función por separado. Es decir:

$$Dom(f(x) + g(x)) = Dom(f(x) - g(x)) = Dom(f(x) \cdot g(x)) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Cociente de funciones \rightarrow El dominio es la intersección de los dominios de cada función por separado, menos los valores que anulan al denominador. Es decir:

$$Dom\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$$

■ Rango o recorrido de una función

El rango, recorrido o imagen de una función es el conjunto de valores que toma la variable $f(x)$.

El recorrido se obtiene observando los valores que toma el eje vertical en la representación gráfica. O bien, si podemos calcular la función inversa $f^{-1}(x)$, estudiando el dominio de esta función inversa.

Simetría

Una función $f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas vertical OY si es una función par. Es decir: $f(x) = f(-x)$.

Una función $f(x)$ es simétrica respecto al origen $(0,0)$ si es una función impar. Es decir: $f(x) = -f(-x)$.

■ Periodicidad

Una función $f(x)$ es periódica de periodo k si verifica:

$$f(x) = f(x + kn), k \in \mathbb{Z}, n = \text{constante}$$

Composición de funciones

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Se define una nueva función que asocia a cada elemento del dominio de $f(x)$ el valor de $g[f(x)]$ y se denota $(g \circ f)(x) \equiv$ *función composición* . Se lee f compuesta con g .

El dominio de $(g \circ f)(x)$ son los valores del dominio de $f(x)$ que cumplen que su imagen $f(x)$ pertenece al dominio de $g(x)$. Es decir:

$$Dom(g \circ f)(x) = \{x \in Dom(f) \mid f(x) \in Dom(g(x))\}$$

La composición de funciones no es conmutativa: $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

La composición de funciones sí es asociativa: $f \circ (g \circ h)(x) \neq (f \circ g) \circ h(x)$

Existe elemento neutro en la composición: $i(x) = x \rightarrow (f \circ i)(x) = (i \circ f)(x) = f(x)$

Función exponencial

Las función exponencial hace corresponder, a cada número real x , la potencia a^x .

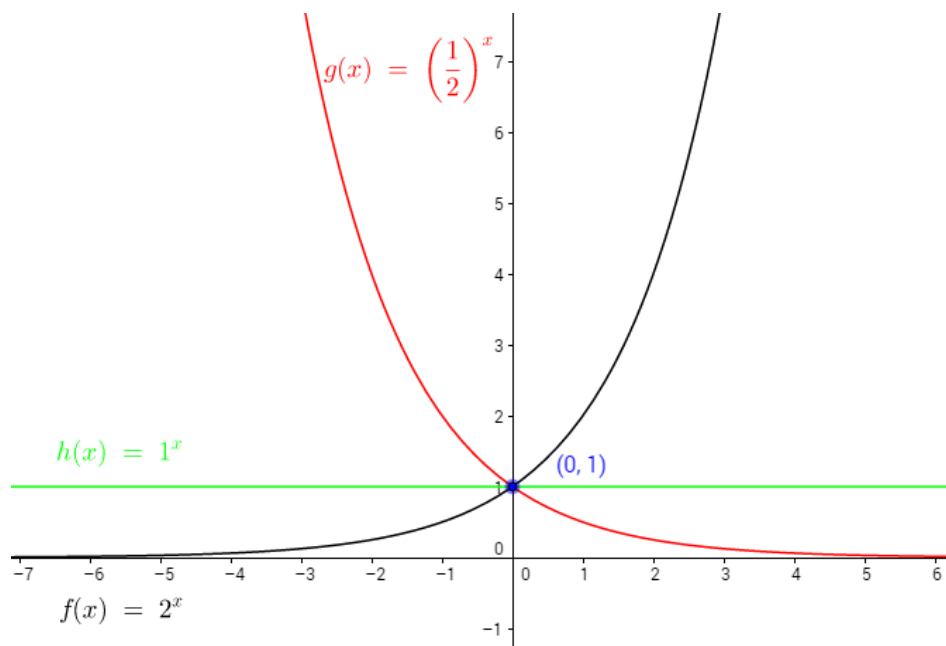
El término a es la base, mientras que x es el exponente.

Si $a > 1 \rightarrow f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente.

Si $a = 1 \rightarrow f(x) = 1^x$ es una recta horizontal $f(x) = 1$.

Si $a < 1 \rightarrow f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente.

Por definición, la base a nunca puede ser negativa.



El dominio de cualquier función exponencial son todos los números reales.

El recorrido son los reales positivos $(0, +\infty)$.

La función $f(x) = a^x$ es simétrica de $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ respecto al eje vertical OY .

El punto $(0, 1)$ siempre pertenece a la gráfica de la función exponencial.

Si $f(x) = a^x$, el punto $(1, a)$ pertenece a la gráfica de la función.

Si $a = e = 2,73\dots \rightarrow f(x) = e^x$ se conoce como función exponencial natural.

Función logaritmo

La función logaritmo es la función inversa de la función exponencial. Es decir:

$$\log_a x = y \rightarrow \text{aplicamos exponencial de base } a \rightarrow x = a^y$$

¿Cómo entender la función logaritmo $\log_a x = y$?

Significa "¿A qué valor debemos elevar a para obtener x ?" $\rightarrow x = a^y$

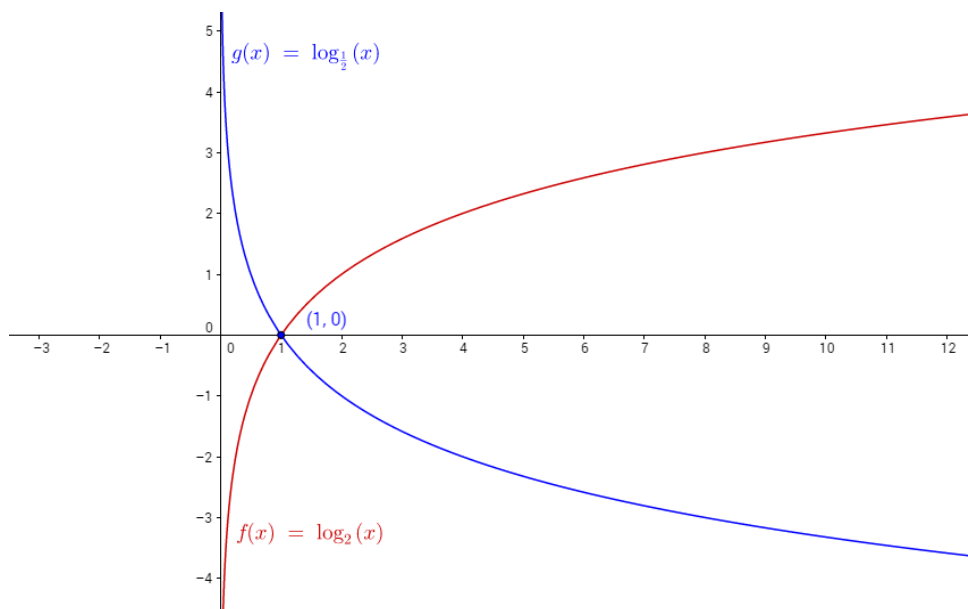
En $f(x) = \log_a x$ el término a es la base del logaritmo.

Si $a > 1 \rightarrow f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente creciente.

Si $a = 1 \rightarrow$ No tiene sentido plantearlo, ya que 1 elevado a cualquier número real siempre da 1 .

Si $a < 1 \rightarrow f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente decreciente.

Por definición, no existen logaritmos de base negativa. Es decir: $a > 0$.



El dominio de la función logaritmo son todos los reales positivos $(0, +\infty)$.

El punto $(1, 0)$ siempre pertenece a la gráfica de la función exponencial.

Si $f(x) = \log_a x$, el punto $(a, 1)$ pertenece a la gráfica de la función.

La inversa de $f(x) = \log_a x$ es $f^{-1}(x) = a^x$, por lo tanto ambas funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Si $a=e=2,73\dots \rightarrow f(x)=\log_e x=\ln x$ se conoce como función logaritmo natural o logaritmo neperiano.

Algunas propiedades útiles al trabajar con logaritmos:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a (a^n) = n$$

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \rightarrow \text{cambio de base}$$