Teoría – Tema 1

Valor absoluto

Índice de contenido

Valor absoluto de un número real

El valor absoluto de un número real a se escribe $|a|$ y es el mismo número a cuando es positivo o cero, y opuesto de a cuando es negativo. Se define como:

$$|a|=\left\{\begin{matrix} -a & si & a<0 \\ a>0 & si & a\geq 0\end{matrix}\right\}$$

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

$$|a|=|-a|$$
$$|a-b|=0\Leftrightarrow a=b$$
$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$
$$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|},\quad si\quad b\neq 0$$
$$|a+b|\leq|a|+|b|$$
$$|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$$
$$|a-b|\geq||a|-|b||$$
$$|a|\leq b\Leftrightarrow -b\leq a\leq b\quad\rightarrow\quad a\in[-b,b]$$
$$|a|\geq b\Leftrightarrow\{a\leq -b\}\cup\{a\geq b\}$$

Podemos ver el valor absoluto como la distancia del número al origen 0 de la recta real. Y las distancias, por definición, siempre son positivas.

Valor absoluto en una ecuación

En las ecuaciones que contienen valor absoluto hay una norma muy importante que debemos aprender desde ya: **no se puede operar con valor absoluto**.

Para "eliminar las barras del valor absoluto" debemos obtener las raíces del argumento contenido dentro del valor absoluto, y aplicar la definición general: donde sea positivo se quitan las barras, y donde sea negativo se quitan las barras y se antepone un signo negativo.

Los puntos que separan los intervalos se denominan puntos frontera. Uno, y solo uno, de los tramos a izquierda o derecha deben contener al punto frontera

Ejemplo

$|x-3|=5$ → Igulamos el contenido del valor absoluto a 0 → $x-3=0$ → $x=3$

Y con este valor aplicamos la definición de valor absoluto: donde $x-3$ sea positivo se quitan las barras, donde $x-3$ sea negativo se quitan las barras y se pone un signo negativo delante.

$\left\{\begin{matrix} si \;\; x\geq 3 \;\Rightarrow x-3=5 \Rightarrow x=8 \\ si \;\; x<3 \;\Rightarrow -(x-3)=5 \Rightarrow x=-2 \end{matrix}\right\}$ → Hay dos soluciones, una para cada intervalo.

Fíjate que hemos puesto el signo igual cuando $x\geq 3$. Tambien podríamos haber puesto el igual en el otro intervalo. Lo importante es que solo se ponga en un solo intervalo, ya que un punto no puede estar definido para dos ecuaciones distintas.

Ejemplo

$3|5-4x|=9$ → $|5-4x|=3$ → igualamos a cero la expresión contenida en el valor absoluto → $5-4x=0$ → $x=\frac{5}{4}$ → $\left\{\begin{matrix} si \;\; x>\frac{5}{4} \;\Rightarrow -(5-4x)=3 \Rightarrow x=2 \\ si \;\; x\leq \frac{-5}{4} \;\Rightarrow 5-4x=3 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$

Nuevamente hay dos soluciones, una para cada intervalo.

Si dentro del valor absoluto aparecen polimios de grado superior o ecuaciones racionales, la cosa se complica un poco.

Pero no es algo insalvable. Hay cosas peores en la vida. Al igual que hicimos con las inecuaciones, debemos obtener las raíces del numerador y del denominador, formar intervalos con esas raíces, y ver el signo que toma el argumento en cada intervalo.

Donde el signo sea positivo, se quitan las barras. Donde el signo sea negativo, se quitan las barras y se antepone el signo negativo. Veamos ejemplos.

Ejemplo

$2x+|x^2-9|=15$ → Igualamos el contenido del valor absoluto a 0 → $x^2-9=0$ → $x=\pm 3$ → Y con estas raíces vemos el signo del argumento en los diferentes intervalos.

$(-\infty,-3)$ → Tomo por ejemplo $x=-10$ → $(-10)^2-9=91>0$ → Quitar barras

$(-3,3)$ → Tomo por ejemplo $x=0$ → $0^2-9=-9<0$ → Quitar barras y anteponer signo negativo

$(3,\infty)$ → Tomo por ejemplo $x=10$ → $(10)^2-9=91>0$ → Quitar barras

Con esto, la ecuación de partida se rompe en tres ecuaciones diferentes (una para cada intervalo).

$$\left\{\begin{array}{c} si\ \ x<-3 \rightarrow 2x+x^2-9=15 \rightarrow x^2+2x-24=0 \\ si\ -3\leq x\leq 3 \rightarrow 2x-(x^2-9)=15 \rightarrow -x^2+2x-6=0 \\ si\ \ x>3 \rightarrow 2x+x^2-9=15 \rightarrow x^2+2x-24=0 \end{array}\right\}$$

Debemos resolver cada ecuación. Y las soluciones serán válidas siempre que pertenezcan a cada uno de los intervalos en que está definida la ecuación.

Fíjate que las ecuaciones para $x<-3$ y para $x>3$ son idénticas.

$x^2+2x-24=0$ → soluciones → $x=-6$ para intervalo $x<-3$ y $x=4$ para $x>3$.

$-x^2+2x-6=0$ → No tiene solución → No hay solución parael intervalo $[-3,3]$.

Funciones con valor absoluto

El valo absoluto también puede aparecer en funciones.

Gráficamente, el valor absoluto pasa a positivo todo lo que en una gráfica esté por debajo del eje horizontal. Funciona como una espejo respecto al eje horizontal.

Las fórmula de las funciones con valor absoluto deben convertirse en funciones a trozos, obteniendo una fórmula para cada uno de los intervalos en que se rompe la función.

Los pasos a seguir son los siguientes.

1. Igualamos a cero al función contenida en el valor absoluto, y obtenemos las raíces.

2. Formamos intervalos con las raíces y evaluamos el signo de la función en cada intervalo.

3. En los intervalos donde la función es negativa, cambiamos el signo, creando así la función a trozos.

4. Representamos la función resultante en cada uno de sus intervalos.

Un ejemplo:

$$f(x)=|x-3|$$

Calculamos las raíces del argumento del valor absoluto: $x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=3$

Creamos intervalos:

$si \quad x<3 \quad \rightarrow \quad x-3<0$ → cambiar signo en la función

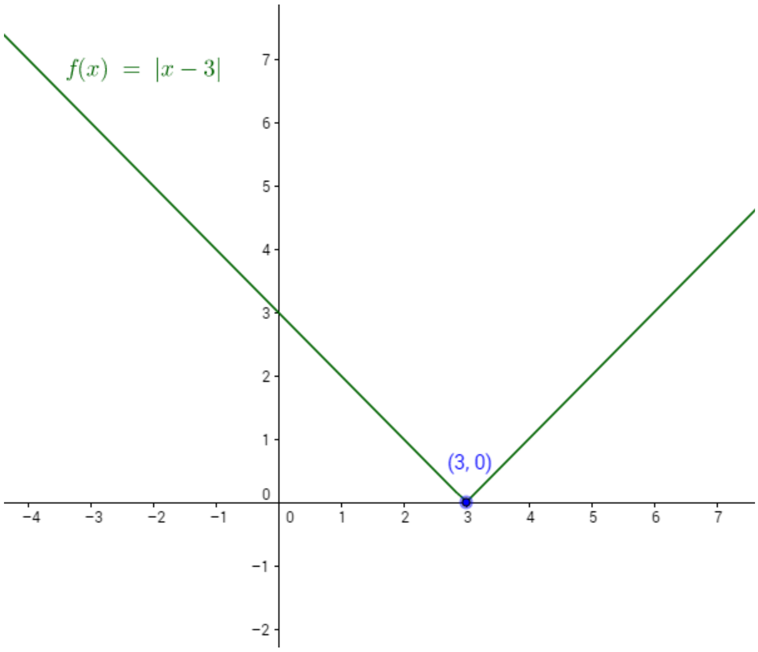
$si \quad x>3 \quad \rightarrow \quad x-3>0$

Creamos la función a trozos:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 3-x & si & x<3 \\ x-3 & si & x\geq 3 \end{Bmatrix}$$

Fíjate que ponemos el signo igual en uno de los intervalos (es indiferente donde lo coloquemos, pero solo en un intervalo).

Representamos la función, cuyo dominio son todos los números reales.



Otro ejemplo:

$f(x)=|x^2-5x+6|$

Calculamos las raíces de $x^2-5x+6=0 \rightarrow x=2 \ , \ x=3$

Creamos intervalos:

$si \ \ x<2 \rightarrow x^2-5x+6>0$

$si \ \ 2<x<3 \rightarrow x^2-5x+6<0$ → cambiar signo en la función

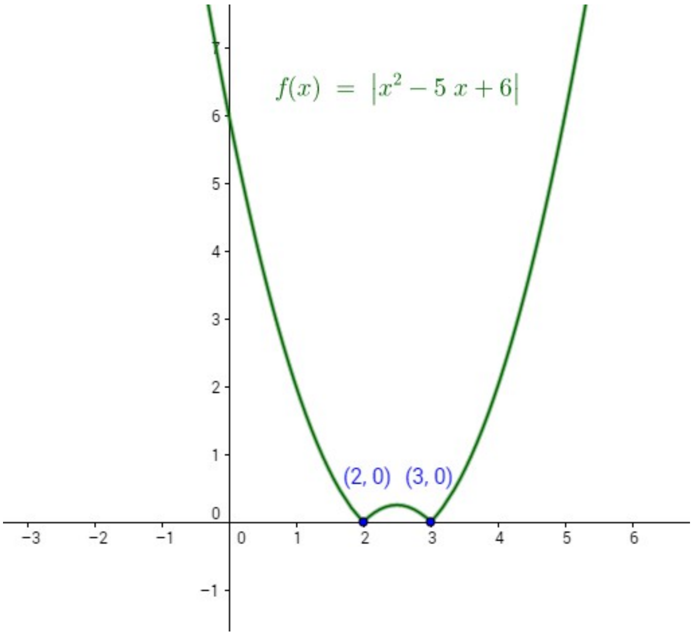
$si \ \ x>3 \rightarrow x^2-5x+6>0$

Creamos la función a trozos:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c} x^2-5x+6 \quad si \quad x<2 \\ -x^2+5x-6 \quad si \quad 2\leq x\leq 3 \\ x^2-5x+6 \quad si \quad x>3 \end{array}\right\}$$

El signo igual lo colocamos en uno de los extremos, pero solo en uno (un punto solo puede tener un único valor en la función).

Representamos la función, cuyo dominio son todos los números reales.


$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
(2, 0)
(3, 0)