Teoría – Tema 1

Teorema del resto y Ruffini

Índice de contenido

Teorema del resto

Sea un polinomio $P(x)$ que dividimos entre $(x-a)$. El resultado de la división es igual al cociente $C(x)$, generándose un resto que llamaremos r .

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+r$$

El resto r es una constante, ya que su grado debe ser menor que el grado de $(x-a)$.

Si evaluamos la expresión anterior en $x=a$, obtenemos:

$$P(a)=(a-a)\cdot C(a)+r \rightarrow P(a)=0\cdot C(a)+r \rightarrow P(a)=r$$

Es decir: el resto r que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$, es igual al valor del polinomio en $x=a \rightarrow P(a)=r$.

Ejemplo

Obtener el resto que resulta de dividir $P(x)=2x^3-3x^2-7$ entre $(x-2)$.

Aplicando la conclusión del teorema del resto → $x=2 \rightarrow P(2)=r$

$$P(2)=2^3-3\cdot 2^2-7 \rightarrow P(2)=-11 \rightarrow r=-11$$

Una consecuencia de este teorema es lo que se conoce como corolario del teorema del resto. Este corolario afirma que $(x-a)$ es una raíz o solución del polinomio $P(x)$ si, y solo si, se cumple la igualdad $P(a)=0$.

Ejemplo

Comprobar si $x=1, x=-1, x=3, x=-3$ son soluciones del siguiente polinomio de grado tres: $P(x)=x^3+3x^2-x-3$.

$P(1)=0$ → sí es solución

$P(-1)=0$ → sí es solución

$P(3)=48\neq 0$ → no es solución

$P(-3)=0$ → sí es solución

Regla de Ruffini para dividir polinomios

La regla de Ruffini es una forma recurrente útil en la división de polinomios de cualquier grado entre polinomios de primer grado de la forma $(x-a)$.

Colocamos los coeficientes del polinomio ordenados en una fila horizontal. Si algún término no existe, su coeficiente es cero.

El valor a de la expresión $(x-a)$ se coloca a la izquierda. Y se opera de manera recurrente de la siguiente forma: bajar primer término, multiplicarlo por a , colocar el resultado en la segunda columna y sumarlo al segundo coeficiente, y así sucesivamente. El último resultados erá el resto de la división.

Por ejemplo, dividamos $P(x)=x^4-3x^2+2$ entre $(x-3)$.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

El resto de la división resulta $r=56=P(3)$, que coincide con el valor del polinomio evaluado en $x=3$.

$$x^4-3x^2+2=(x-3)(x^3+3x^2+6x+18)+56$$

Fíjate cómo queda el cociente → $C(x)=(x^3+3x^2+6x+18)$ → cuyos coeficientes coinciden con los que se obtiene de aplicar la regla de Ruffini, reduciendo en un grado respecto al polinomio de partida $P(x)$.

Con esto, contamos con una regla para buscar las raíces de un polinomio (siempre que sean resultados sencillos). Aplicar Ruffini una y otra vez hasta obtener, si es posible, tantas raíces como grado tenga el polinomio $P(x)$.

¿Qué valores tomar para a en la regla de Ruffini?

Suele funcionar (repito, si las soluciones son sencillas) tomar los divisores del término independiente del polinomio $P(x)$. Y en los casos con raíces no enteras, suele funcionar tomar los divisores del término independiente dividido entre los divisores del término con mayor grado.

Dos ideas finales. Las raíces pueden ser múltiples, por lo que a veces deberemos probar más de una vez con un mismo valor a .

Si al terminar de aplicar Ruffini, el coeficiente que queda tras el proceso de factorización es distinto de la unidad, no debemos olvidar colocarlo si deseamos expresar correctamente el polinomio $P(x)$ factorizado.

Con un ejemplo completo, comprenderemos todos los casos posibles.

Factorizar $P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$.

	2	**1**	**-8**	**-1**	**6**
1		2	3	-5	-6
	2	3	-5	-6	0
-1		-2	-1	6	
	2	1	-6	0	
-2		-4	6		
	2	-3	0		
3/2		3			
	2	0			

$$P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6=2\cdot(x-1)(x+1)(x+2)(x-\frac{3}{2})$$