Teoría – Tema 1

Números reales. Polinomios. Teorema del resto y Ruffini

Índice de contenido

El cuerpo de los números reales

Los números naturales son $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5...\}$.

Los números enteros son $\mathbb{Z}=\{...-5,-4,-3,-2,0,1,2,3,4,5...\}$. Los enteros incluyen a los naturales. Tanto los enteros como los naturales son un conjunto de infinitos términos numerables (siempre sabemos qué número sigue a otro dado).

Los números fraccionarios son aquellos que se forman como fracción de número enteros. Por ejemplo: $\mathbb{Q}=\{...-\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{2}...\}$. Los fraccionarios engloban a los enteros. Los fracciones forman un conjunto infinito no numerable (dado un número, no sabemos cuál sería el siguiente).

Los irracionales son aquellos que no pueden escribirse en forma de fracción de números enteros. Por ejemplo: $I=\{...\pi,e...\}$. Son números con infinitos decimales y forman un conjunto disjunto con los fraccionarios (no tienene términos en común).

Englobando a fracciones e irracionales encontramos a los número reales $\mathbb{R}$, que serán nuestra herramienta de trabajo básica en la asignatura.

En secundaria estudiamos propiedades básicas que cumplen los números reales. Recordemos brevemente las más importantes.

La suma de números reales es conmutativa y asociativa. Su elemento neutro es el 0 . Dado un número real x su término simétrico en la suma es $-x$.

El producto de números reales es conmutativo y asociativo. Su elemento neutro es el 1 . Dado un número real x su término simétrico en el producto es $\frac{1}{x}$ (salvo para $x=0$, ya que en matemáticas no existe la división por 0).

El producto es distributivo respecto de la suma. Es decir: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Con estas propiedades se dice que los números reales con las operaciones suma y producto tienen estructura de cuerpo matemático.

Algunas cosillas de **culturilla general numérica** que seguro hemos estudiado alguna vez:

- No está permitido dividir por 0 .
- Cualquier número elevado a 0 vale 1 .
- La raíz de índice par de un número negativo no es un número real (más adelante hablaremos de números complejos, donde sí está definida la raíz par de número negativos).
- Un exponente negativo se puede expresar de la forma → $a^{-b}=\frac{1}{a^{b}}$

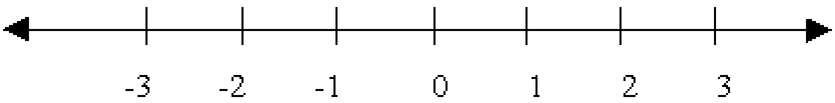
- La división de fracciones resulta → $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Errores típicos en operaciones elementales que iremos repasando en los problemas que plantearemos en clase:

- Factorizar mal.
- Despejar mal cuando una expresión queda igualada a 0.
- Simplificar mal en cocientes de polinomios.
- Aplicar mal las identidades notables.
- Olvidar el signo negativo al aplicar raíz cuadrada.

Punto, intervalo y acotación

Un valor real $x \in \mathbb{R}$ podemos representarlo en la recta real. Matemáticamente sería un punto dentro de esa recta, es decir, una entidad matemática ideal (sin tamaño) que ocupa una posición dentro de la infinita recta real que se propaga desde menos infinito $(-\infty)$ hasta más infinito $(+\infty)$.



Un intervalo será el conjunto de infinitos puntos contenidos entre un punto de inicio y un punto de fin. El paréntesis ( ) indica extremo abierto y el corchete [ ] extremo cerrado. Un extremo abierto indica que el punto no se incluye en el intervalo, y un extremo cerrado indica que el punto sí se incluye en el intervalo.

De esta forma podemos tener:

- Intervalos abiertos → $(-3,4)$
- Intervalos cerrados → $[2,4]$
- Intervalos semiabiertos o semicerrados → $(-2,-1]$, $[1,6)$

Si uno de los extremos es el infinito siempre se usa extremo abierto, creándose lo que se conoce como semirrecta:

- Semirrecta → $(-\infty,0)$, $[5,+\infty)$

Un valor que sea mayor o igual que cualquier valor de un intervalo se llama cota superior. Por ejemplo, en $[1,6)$ una cota superior sería el número 8 . Existen infinitas cotas superiores.

Un valor que sea menor o igual que cualquier valor de un intervalo se llama cota inferior. Por ejemplo, en $[1,6)$ una cota inferior sería el número -3 . Existen infinitas cotas inferiores.

Al menor de las cotas superiores se llama supremo. En el ejemplo $[1,6)$ el supremo sería el número 6 .

Al mayor de las cotas inferiores se llama ínfimo. En el ejemplo $[1,6)$ el ínfimo sería el número 1 .

Si el supremo pertenece al intervalo, se denomina máximo. En el ejemplo $[1,6)$ el supremo no es máximo.

Si el ínfimo pertenece al intervalo, se denomina mínimo. En el ejemplo $[1,6)$ el ínfimo sí es mínimo.

Teorema del resto

Sea un polinomio $P(x)$ que dividimos entre $(x-a)$, donde a es un número real. El resultado de la división es igual al cociente $C(x)$, generándose un resto que llamaremos r .

De esta forma, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto:

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+r$$

El resto r es un número constante, ya que su grado debe ser menor que el grado de $(x-a)$ que es grado uno. Si evaluamos la expresión anterior en $x=a$, obtenemos:

$$P(a)=(a-a)\cdot C(a)+r \;\rightarrow\; P(a)=0\cdot C(a)+r \;\rightarrow\; P(a)=r$$

Es decir: el resto r que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$, es igual al valor del polinomio en $x=a \rightarrow P(a)=r$.

Ejemplo

Obtener el resto que resulta de dividir $P(x)=2x^3-3x^2-7$ entre $(x-2)$.

Aplicando la conclusión del teorema del resto → $x=2 \rightarrow P(2)=r$

$$P(2)=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2-7 \;\rightarrow\; P(2)=-3 \;\rightarrow\; r=-3$$

Una consecuencia de este teorema es lo que se conoce como corolario del teorema del resto. Este corolario afirma que $x=a$ es una raíz o solución del polinomio $P(x)$ si, y solo si, se cumple la igualdad $P(a)=0$.

Ejemplo

Comprobar si $x=1, x=-1, x=3, x=-3$ son soluciones del siguiente polinomio de grado tres: $P(x)=x^3+3x^2-x-3$.

$P(1)=0$ → sí es solución

$P(-1)=0$ → sí es solución

$P(3)=48\neq 0$ → no es solución

$P(-3)=0$ → sí es solución

Regla de Ruffini para dividir polinomios

La regla de Ruffini es una forma recurrente útil en la división de polinomios de cualquier grado entre polinomios de primer grado de la forma $(x-a)$.

Colocamos los coeficientes del polinomio ordenados en una fila horizontal. Si algún término no existe, su coeficiente es cero.

El valor a de la expresión $(x-a)$ se coloca a la izquierda. Y se opera de manera recurrente de la siguiente forma: bajar primer término, multiplicarlo por a , colocar el resultado en la segunda columna y sumarlo al segundo coeficiente, y así sucesivamente. El último resultado erá el resto de la división.

Por ejemplo, dividamos $P(x)=x^4-3x^2+2$ entre $(x-3)$.

	1	**0**	**-3**	**0**	**2**
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

El resto de la división resulta $r=56=P(3)$, que coincide con el valor del polinomio evaluado en $x=3$.

$$x^4-3x^2+2=(x-3)(x^3+3x^2+6x+18)+56$$

Fíjate cómo queda el cociente → $C(x)=(x^3+3x^2+6x+18)$ → cuyos coeficientes coinciden con los que se obtiene de aplicar la regla de Ruffini, reduciendo en un grado respecto al polinomio de partida $P(x)$.

Con esto, contamos con una regla para buscar las raíces de un polinomio (siempre que sean resultados sencillos). Aplicar Ruffini una y otra vez hasta obtener, si es posible, tantas raíces como grado tenga el polinomio $P(x)$.

¿Qué valores tomar para a en la regla de Ruffini?

Suele funcionar (repito, si las soluciones son sencillas) tomar los divisores del término independiente del polinomio $P(x)$. Y en los casos con raíces no enteras, suele funcionar tomar los divisores del término independiente dividido entre los divisores del término con mayor grado.

Dos ideas finales. Las raíces pueden ser múltiples, por lo que a veces deberemos probar más de una vez con un mismo valor a .

Si al terminar de aplicar Ruffini, el coeficiente que queda tras el proceso de factorización es distinto de la unidad, no debemos olvidar colocarlo si deseamos expresar correctamente el polinomio $P(x)$ factorizado.

Con un ejemplo completo, comprenderemos todos los casos posibles.

Factorizar $P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$.

	2	**1**	**-8**	**-1**	**6**
1		2	3	-5	-6
	2	3	-5	-6	0
-1		-2	-1	6	
	2	1	-6	0	
-2		-4	6		
	2	-3	0		
3/2		3			
	2	0			

$$P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6=2\cdot(x-1)(x+1)(x+2)(x-\frac{3}{2})$$