Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 03 - Problemas 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8

Hoja 3. Problema 1

Resuelto por María Mundi López (septiembre 2014)

1. Un ciclista recorrió 120 Km a la ida. A la vuelta, llevando una velocidad de 10 Km/h más, tardó dos horas menos. ¿Qué tiempo empleó en realizar el recorrido y cuál fue la velocidad de ida?

x = tiempo de ida (horas)

y = velocidad de ida (km/h)

$x-2$ = tiempo de vuelta (horas)

$y+10$ = velocidad de vuelta (km/h)

El tiempo de ida será igual a la distancia recorrida entre la velocidad a la que se va:

$$Tiempo\, de\, ida: \frac{120}{y}=x$$

$$Tiempo\, de\, vuelta: \frac{120}{y+10}=x-2$$

Así obtenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{120}{y}=x \\ \dfrac{120}{y+10}=x-2 \end{cases}$$

Lo resolvemos sustituyendo el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$\frac{120}{y+10}=\frac{120}{y}-2$$

$$\frac{120}{y+10}=\frac{120-2y}{y}$$

$$120y=120y-2y^2+1200-20y$$

$$y^2+10y-600=0$$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación cuadrada.

$$y=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot(-600)}}{2}$$

$$y=\frac{-10\pm 50}{2}$$

$$y_1=-30$$

$$y_2=20$$

La solución que escogemos es la positiva, ya que hablamos de velocidad → $y=20\,km/h$. Calculamos el tiempo de ida:

$$\frac{120}{20}=x$$

Solución final → tardó $x=6\,horas$ a la ida y viajó a $y=20\,km/h$

Hoja 3. Problema 2

Resuelto por Alejandra Conde Casado (septiembre 2015)

2. Calcula los valores de x e y que verifican el sistema.

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=5 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$$

Despejamos x^2 en la primera ecuación $x^2=5-y^2$. Llevamos este resultado a la segunda ecuación.

$$\frac{1}{5-y^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{3}{4}$$

Calculamos un denominador común para las fracciones.

$$\frac{4y^2}{4y^2(5-y^2)}-\frac{4(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)}=\frac{3y^2(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} \rightarrow 4y^2-4(5-y^2)=3y^2(5-y^2)$$

$$4y^2-20+4y^2=15y^2-3y^4 \rightarrow 3y^4-7y^2-20=0$$

La ecuación bicuadrática la resolvemos con el cambio de variable $y^2=t$.

$$3y^4-7y^2-20=0 \rightarrow 3t^2-7t-20=0 \rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{6} \rightarrow t=\frac{7\pm 17}{6}$$

$$t=\frac{-5}{2} \quad , \quad t=4$$

Si $t=\frac{-5}{2} \rightarrow y=\sqrt{\frac{-5}{2}}\notin \mathbb{R}$

Si $t=4 \rightarrow y=\pm 2$ $\rightarrow$ solución válida

Si $y=2$, $x^2=5-y^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{5-4} \rightarrow x=\pm 1$ $\rightarrow$ soluciones $(1,2)$, $(-1,2)$

Si $y=-2$, $x^2=5-y^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{5-4} \rightarrow x=\pm 1$ $\rightarrow$ soluciones $(1,-2)$, $(-1,-2)$

Hoja 3. Problema 3

Resuelto por María Muñoz López (septiembre 2015)

3. Resuelve.

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x+16}}{3}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x+16}}{3} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{x+16}}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad x+\frac{1}{x}+2=\frac{4(x+16)}{9} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{x^2+1+2x}{x}=\frac{4x+64}{9} \quad \rightarrow \quad 9x^2+9+18x=4x^2+64x \quad \rightarrow \quad 5x^2-46x+9=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado, y las soluciones resultan:

$$x=\frac{46\pm 44}{10} \quad \rightarrow \quad x=9 \quad , \quad x=\frac{1}{5}$$

Ambas soluciones satisfacen la igualdad de partida.

Hoja 3. Problema 5

Resuelto por Fermín Román Palma (septiembre 2014)

5. Resuelve.

$$\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{7x+1}{x^2-1}$$

Lo primero que hacemos es sacar el m.c.m de los denominadores:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$\frac{(3\mathrm{x}-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{((x)^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{7\mathrm{x}+1}{(x-1)(x+1)}$$

Operamos y ordenamos:

$$\frac{3x^2+3x-3x-3+x^3-x^2+2x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

Igualamos numeradores:

$$x^3+3x^2-x^2-3x+3x+2x-7x-2-3-1=0$$

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

Hacemos Ruffini donde obtendremos tres raíces $-1,2\,y-3$. Las soluciones a nuestra ecuación de partida son $x=2,-3$. No tomamos $x=-1$ por anular algunos de los denominadores iniciales.

Hoja 3. Problema 6

Resuelto por Inés Delgado (septiembre 2014)

6. Simplifica.

$$\frac{x^4 - y^4}{3x^3 y - 3xy^3}$$

Desarrollamos el numerador como el binomio suma por diferencia, mientras que en el denominador obtenemos factor común de $x \cdot y$.

$$\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{3xy(x^2 - y^2)}$$

Finalmente, simplificamos el factor $(x^2 - y^2)$.

$$\frac{x^2 + y^2}{3xy}$$

Hoja 3. Problema 7

Resuelto por Félix Berrios (septiembre 2014)

7. Opera y Simplifica.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Calculamos el m.c.m. de los denominadores y operamos.

$$(a+b)\left(\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}\right)+(a-b)\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{ab+b^2}{ab}-\frac{a^2+ab}{ab}+\frac{ab-b^2}{ab}+\frac{a^2-ab}{ab}$$

$$\frac{ab+b^2-a^2-ab+ab-b^2+a^2-ab}{ab}=0$$

Hoja 3. Problema 8

Resuelto por Miriam Marín Muñoz (septiembre 2014)

8. Opera y Simplifica.

$$\left(\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\right)\frac{1}{x^2-9}$$

Aplicamos Ruffini en el numerador de la primera fracción.

	1	-5	3	9		
3		3	-6	-9		
	1	-2	-3	0	→	$(x-3)$
3		3	3			
	1	1	0		→	$(x-3)$
-1		-1				
	1	0			→	$(x+1)$

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la primera fracción → $(x-1)(x+1)$. Y aplicamos Ruffini en el numerador de la segunda fracción.

	1	2	1		
-1		-1	-1		
	1	1	0	→	$(x+1)$
-1		-1			
	1	0		→	$(x+1)$

Aplicamos Ruffini en el denominador de la segunda fracción:

	1	2	-3		
-3		-3	3		
	1	-1	0	$\rightarrow$	$(x+3)$
1		1			
	1	0		$\rightarrow$	$(x-1)$

El numerador de la tercera fracción queda igual a 1.
Desarrollamos como identidad notable el denominador de la tercera fracción.

$$(x-3)(x+3)$$

Sustituimos los factores y simplificamos.

$$\left(\frac{(x-3)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}:\frac{(x+1)(x+1)}{(x+3)(x-1)}\right)\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{(x-3)(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+1)}\cdot\left(\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right)$$

$$\frac{x-3}{(x+1)^2}$$