

Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 03 - Problemas 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8

Hoja 3. Problema 1

Resuelto por María Mundi López (septiembre 2014)

1. Un ciclista recorrió 120 Km a la ida. A la vuelta, llevando una velocidad de 10 Km/h más, tardó dos horas menos. ¿Qué tiempo empleó en realizar el recorrido y cuál fue la velocidad de ida?

x = tiempo de ida (horas)

y = velocidad de ida (km/h)

$x-2$ = tiempo de vuelta (horas)

$y+10$ = velocidad de vuelta (km/h)

El tiempo de ida será igual a la distancia recorrida entre la velocidad a la que se va:

$$\text{Tiempo de ida: } \frac{120}{y} = x$$

$$\text{Tiempo de vuelta: } \frac{120}{y+10} = x-2$$

Así obtenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{120}{y} = x \\ \frac{120}{y+10} = x-2 \end{cases}$$

Lo resolvemos sustituyendo el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$\frac{120}{y+10} = \frac{120}{y} - 2$$

$$\frac{120}{y+10} = \frac{120-2y}{y}$$

$$120y = 120y - 2y^2 + 1200 - 20y$$

$$y^2 + 10y - 600 = 0$$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación cuadrada.

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-600)}}{2}$$

$$y = \frac{-10 \pm 50}{2}$$

$$y_1 = -30$$

$$y_2 = 20$$

La solución que escogemos es la positiva, ya que hablamos de velocidad \rightarrow
 $y = 20 \text{ km/h}$. Calculamos el tiempo de ida:

$$\frac{120}{20} = x$$

Solución final \rightarrow tardó $x = 6 \text{ horas}$ a la ida y viajó a $y = 20 \text{ km/h}$

Hoja 3. Problema 2

Resuelto por Alejandra Conde Casado (septiembre 2015)

2. Calcula los valores de x e y que verifican el sistema.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Despejamos x^2 en la primera ecuación $x^2 = 5 - y^2$. Llevamos este resultado a la segunda ecuación.

$$\frac{1}{5 - y^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{3}{4}$$

Calculamos un denominador común para las fracciones.

$$\frac{4y^2}{4y^2(5-y^2)} - \frac{4(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} = \frac{3y^2(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} \rightarrow 4y^2 - 4(5-y^2) = 3y^2(5-y^2)$$
$$4y^2 - 20 + 4y^2 = 15y^2 - 3y^4 \rightarrow 3y^4 - 7y^2 - 20 = 0$$

La ecuación bicuadrática la resolvemos con el cambio de variable $y^2 = t$.

$$3y^4 - 7y^2 - 20 = 0 \rightarrow 3t^2 - 7t - 20 = 0 \rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{6} \rightarrow t = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$t = \frac{-5}{2}, \quad t = 4$$

$$\text{Si } t = \frac{-5}{2} \rightarrow y = \sqrt{\frac{-5}{2}} \notin \mathbb{R}$$

$$\text{Si } t = 4 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow \text{solución válida}$$

$$\text{Si } y = 2, \quad x^2 = 5 - y^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{5 - 4} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{soluciones } (1, 2), (-1, 2)$$

$$\text{Si } y = -2, \quad x^2 = 5 - y^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{5 - 4} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{soluciones } (1, -2), (-1, -2)$$

Hoja 3. Problema 3

Resuelto por María Muñoz López (septiembre 2015)

3. Resuelve.

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x+16}}{3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x+16}}{3} &\rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{x+16}}{3}\right)^2 \rightarrow x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{4(x+16)}{9} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x^2+1+2x}{x} = \frac{4x+64}{9} &\rightarrow 9x^2+9+18x = 4x^2+64x \rightarrow 5x^2-46x+9=0 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado, y las soluciones resultan:

$$x = \frac{46 \pm 44}{10} \rightarrow x = 9, \quad x = \frac{1}{5}$$

Ambas soluciones satisfacen la igualdad de partida.

Hoja 3. Problema 5

Resuelto por Fermín Román Palma (septiembre 2014)

5. Resuelve.

$$\frac{3x-3}{x-1} + \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{7x+1}{x^2-1}$$

Lo primero que hacemos es sacar el m.c.m de los denominadores:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$\frac{(3x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{((x)^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7x-1}{(x-1)(x+1)}$$

Operamos y ordenamos:

$$\frac{3x^2+3x-3x-3+x^3-x^2+2x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{7x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$x^3+3x^2-x^2-3x+3x+2x-7x-3-3-1$$

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

Hacemos Ruffini donde obtendremos tres raíces $-1, 2$ y -3 . Las soluciones a nuestra ecuación de partida son $x=2, -3$. No tomamos $x=-1$ por anular algunos de los denominadores iniciales.

Hoja 3. Problema 6

Resuelto por Inés Delgado (septiembre 2014)

6. Simplifica.

$$\frac{x^4 - y^4}{3x^3y - 3xy^3}$$

Desarrollamos el numerador como el binomio suma por diferencia, mientras que en el denominador obtenemos factor común de $x \cdot y$.

$$\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{3xy(x^2 - y^2)}$$

Finalmente, simplificamos el factor $(x^2 - y^2)$.

$$\frac{x^2 + y^2}{3xy}$$

Hoja 3. Problema 7

Resuelto por Félix Berrios (septiembre 2014)

7. Opera y Simplifica.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Calculamos el m.c.m. de los denominadores y operamos.

$$(a+b)\left(\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}\right)+(a-b)\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right) \rightarrow \frac{ab+b^2}{ab}-\frac{a^2+ab}{ab}+\frac{ab-b^2}{ab}+\frac{a^2-ab}{ab}$$
$$\frac{ab+b^2-a^2-ab+ab-b^2+a^2-ab}{ab}=0$$

Hoja 3. Problema 8

Resuelto por Miriam Marín Muñoz (septiembre 2014)

8. Opera y Simplifica.

$$\left(\frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 1} : \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} \right) \frac{1}{x^2 - 9}$$

Aplicamos Ruffini en el numerador de la primera fracción.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 3 & 9 \\ 3 & & 3 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 & \rightarrow & (x-3) \\ 3 & & 3 & 3 & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & & \rightarrow & (x-3) \\ -1 & & -1 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \rightarrow & (x+1) \end{array}$$

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la primera fracción $\rightarrow (x-1)(x+1)$. Y aplicamos Ruffini en el numerador de la segunda fracción.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \rightarrow & (x+1) \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \rightarrow & (x+1) \end{array}$$

Aplicamos Ruffini en el denominador de la segunda fracción:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 2 & -3 \\
 -3 & & -3 & 3 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & \rightarrow & (x+3) \\
 1 & & 1 & & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & & \rightarrow & (x-1)
 \end{array}$$

El numerador de la tercera fracción queda igual a 1.

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la tercera fracción.

$$(x-3)(x+3)$$

Sustituimos los factores y simplificamos.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(x-3)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x+1)}{(x+3)(x-1)} \right) \frac{1}{(x-3)(x+3)} \\
 & \frac{(x-3)(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+1)} \cdot \left(\frac{1}{(x-3)(x+3)} \right) \\
 & \frac{x-3}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$