Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 22 - Todos resueltos

Hoja 22. Problema 1

1. Representa gráficamente $y=|2x-3|+|x-1|$ **.**

Rompemos el primer valor absoluto.

$$2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Si $x<\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad 2x-3<0 \quad \rightarrow$ Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si $x>\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad 2x-3>0$

$$y=\begin{cases} -2x+3+|x-1| \quad si \quad x\leq\frac{3}{2} \\ 2x-3+|x-1| \quad si \quad x>\frac{3}{2} \end{cases}$$

Rompemos el segundo valor absoluto.

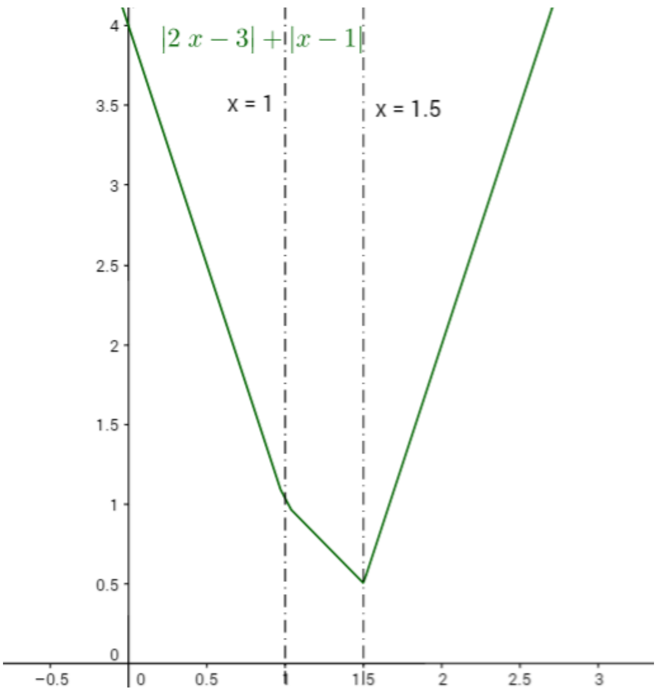
$$x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

Si $x<1 \quad \rightarrow \quad x-1<0 \quad \rightarrow$ Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si $x>1 \quad \rightarrow \quad x-1>0$

$$y=\begin{cases} -2x+3-x+1 \quad si \quad x\leq 1 \\ -2x+3+x-1 \quad si \quad 1<x\leq\frac{3}{2} \\ 2x-3+x-1 \quad si \quad x>\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \quad y=\begin{cases} -3x+4 \quad si \quad x\leq 1 \\ -x+2 \quad si \quad 1<x\leq\frac{3}{2} \\ 3x-4 \quad si \quad x>\frac{3}{2} \end{cases}$$

En cada tramo tenemos una recta, que podemos representar obteniendo un par de puntos en cada tramo. Con ayuda de Geogebra la gráfica quedaría:



Hoja 22. Problema 2

2. Un campesino tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15 el pienso duraría 3 días más y si comprase 25 el pienso duraría tres días menos. Halla el número de bueyes y el número de días que los puede alimentar.

x = número de bueyes

$k \cdot x$ = pienso total que comen los bueyes al día

d = número de días

$k \cdot x \cdot d$ = total de pienso que tiene el campesino

Primero, represento los datos que me dan obteniendo así un sistema de ecuaciones:

$$k \cdot x \cdot d = k(x-15)(d+3)$$
$$k \cdot x \cdot d = k(x+25)(d-3)$$

Operando y simplificando:

$$45 = 3x - 15d$$
$$75 = -3x + 25d$$

De la primera ecuación:

$$3x = 45 + 15d \quad \rightarrow \quad x = \frac{45}{3} + \frac{15d}{3} \quad \rightarrow \quad x = 15 + 5d$$

Y sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$75 = -3(15+5d) + 25d \quad \rightarrow \quad 75 = -45 - 15\text{d} + 25d \quad \rightarrow \quad 75 = -45 + 10d \quad \rightarrow \quad 120 = 10d$$
$$d = 12 \rightarrow x = 75$$

Bueyes que tiene el campesino = 75

Días que durará el pienso = 12

Hoja 22. Problema 3

3. Simplifica, indicando todas las operaciones.

$$\left(\frac{18x-9x^2}{9x^2-1}\cdot\frac{12x^2+2x-2}{4x^3-9x^2+2x}\right):\frac{4x^2+6x+2}{12x^2+x-1}$$

Factorizamos y eliminamos términos poco a poco.

$$\left(\frac{18x-9x^2}{9x^2-1}\cdot\frac{12x^2+2x-2}{4x^3-9x^2+2x}\right):\frac{4x^2+6x+2}{12x^2+x-1} \rightarrow \left(\frac{9x(2-x)}{9(x^2-\frac{1}{9})}\cdot\frac{2(6x^2+x-1)}{x(4x^2-9x+2)}\right):\frac{2(2x^2+3x+1)}{12x^2+x-1}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x^2-\frac{1}{9})}\cdot\frac{(6x^2+x-1)}{(4x^2-9x+2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12x^2+x-1}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}\cdot\frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)(x-\frac{1}{4})}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{3})}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}\cdot\frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12(x+\frac{1}{3})} \rightarrow \left(\frac{(2-x)}{(x-\frac{1}{3})}\cdot\frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{1}\cdot\frac{6(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12} \rightarrow \left(\frac{-1}{1}\cdot\frac{6(x+\frac{1}{2})}{4}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12}$$

$$\frac{-18(x+\frac{1}{2})}{2x^2+3+1} \rightarrow \frac{-18(x+\frac{1}{2})}{2(x+1)(x+\frac{1}{2})} \rightarrow \frac{-9}{x+1}$$

Hoja 22. Problema 4

4. Resuelve $\left\{\begin{matrix} \sqrt{x}-\sqrt{2+y}=2 \\ \frac{x}{3}+2y=1 \end{matrix}\right\}$

En la primera ecuación del sistema, se deja x en un lado de la ecuación y se elevan ambas partes al cuadrado.

$$\sqrt{x}=\sqrt{2+y}+2 \rightarrow (\sqrt{x})^2=(2+\sqrt{2+y})^2 \rightarrow x=4+(2+y)+4\sqrt{2+y}$$

$$x=6+y+4\sqrt{2+y}$$

Con x despejada de la primera ecuación, la despejo también de la segunda.

$$\frac{x}{3}+2y=1 \rightarrow x=3(1-2y)$$

Igualamos los valores de x .

$$6+y+4\sqrt{2+y}=3(-2y+1) \rightarrow 6+y+4\sqrt{2+y}=-6y+3 \rightarrow (4\sqrt{2+y})^2=(-3-7y)^2$$

$$16(2+y)=9+49y^2+42y \rightarrow 49y^2+26y-23=0 \rightarrow y=\frac{-26\pm\sqrt{26^2-4\cdot 49\cdot(-23)}}{2\cdot 49}$$

$$y=\frac{-26\pm 72}{98}$$

$y_1=\frac{-26+72}{98}=\frac{46}{98}=\frac{23}{49}$ → No es solución por no satisfacer el sistema inicial

$$y_2=\frac{-26-72}{98}=\frac{-98}{98}=-1 \rightarrow y=-1$$

Calculo x a partir de la solución de y .

$\frac{x}{3}+2y=1 \rightarrow x=3(-2y+1) \rightarrow x=3(2+1) \rightarrow x=9$ → Soluciones → $\begin{pmatrix} y=-1 \\ x=9 \end{pmatrix}$

Hoja 22. Problema 5

5. Resuelve $\left\{\begin{matrix} y-x=3 \\ 5^x+5^y=\dfrac{126}{5} \end{matrix}\right\}$

De la primera ecuación → $y=x+3$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema → $5^x+5^{x+3}=\dfrac{126}{5} \quad \rightarrow \quad 5^x+125\cdot 5^x=\dfrac{126}{5}$

Cambio de variable $5^x=t \quad \rightarrow \quad t+125\cdot t=\dfrac{126}{5} \quad \rightarrow \quad 126\cdot t=\dfrac{126}{5} \quad \rightarrow \quad t=\dfrac{1}{5}$

Deshacemos el cambio de variable → $5^x=\dfrac{1}{5} \quad \rightarrow \quad x=-1$

Y obtenemos la segunda incógnita → $y=x+3 \quad \rightarrow \quad y=2$

Hoja 22. Problema 6

6. Resuelve $\left\{\begin{matrix} 6x^4+7x^3-12x^2-3x+2\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x-2}+1\leqslant\dfrac{3}{4-x^2} \end{matrix}\right\}$

Estudiamos la primera inecuación → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2\leqslant 0$ → Por Rufinni obtenemos sus raíces → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2=6\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Evaluamos el polinomio en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)$ → $x=-10$ → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2>0$ → No cumple la desigualdad

$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ → $x=-1$ → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2<0$ → Sí cumple la desigualdad

$\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{3}\right)$ → $x=0$ → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2>0$ → No cumple la desigualdad

$\left(\frac{1}{3},1\right)$ → $x=\frac{2}{3}$ → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2<0$ → Sí cumple la desigualdad

$(1,+\infty)$ → $x=10$ → $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2>0$ → No cumple la desigualdad

Solución de la primera inecuación → $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3},1\right]$

Estudiamos la segunda inecuación → $\dfrac{1}{x-2}+1\leqslant\dfrac{3}{4-x^2}$ → unificamos en una única fracción → $\dfrac{x^2+x+1}{(x-2)(x+2)}$

Raíces del numerador → $\nexists\mathbb{R}$

Raíces del denominador → $x=\pm 2$

Evaluamos el cociente en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2) \rightarrow \quad x=-10 \rightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{(x-2)(x+2)}>0$ → No cumple la desigualdad

$(-2,2) \rightarrow \quad x=0 \rightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{(x-2)(x+2)}<0$ → Sí cumple la desigualdad

$(\frac{-1}{2},\frac{1}{3}) \rightarrow \quad x=0 \rightarrow \quad 6x^4+7x^3-12x^2-3x+2>0$ → No cumple la desigualdad

Solución de la segunda inecuación → $(-2,2)$

La solución final del sistema será la intersección de las soluciones particulares.

Solución final → (-2, $\frac{-1}{2}$] U [$\frac{1}{3}$, 1]

Hoja 22. Problema 7

7. Resuelve $\left\{ \begin{array}{c} x^2+y^2=5 \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{3}{4} \end{array} \right\}$

Despejamos x^2 en la primera ecuación $x^2=5-y^2$. Llevamos este resultado a la segunda ecuación.

$$\frac{1}{5-y^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{3}{4}$$

Calculamos un denominador común para las fracciones.

$$\frac{4y^2}{4y^2(5-y^2)}-\frac{4(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)}=\frac{3y^2(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} \rightarrow 4y^2-4(5-y^2)=3y^2(5-y^2)$$

$$4y^2-20+4y^2=15y^2-3y^4 \rightarrow 3y^4-7y^2-20=0$$

La ecuación bicuadrática la resolvemos con el cambio de variable $y^2=t$.

$$3y^4-7y^2-20=0 \rightarrow 3t^2-7t-20=0 \rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{6} \rightarrow t=\frac{7\pm 17}{6}$$

$$t=\frac{-5}{2} \quad , \quad t=4$$

Si $t=\frac{-5}{2} \rightarrow y=\sqrt{\frac{-5}{2}}\notin\mathbb{R}$

Si $t=4 \rightarrow y=\pm 2 \rightarrow$ solución válida

Si $y=2$, $x^2=5-y^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{5-4} \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ soluciones $(1,2)$, $(-1,2)$

Si $y=-2$, $x^2=5-y^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{5-4} \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ soluciones $(1,-2)$, $(-1,-2)$

Hoja 22. Problema 8

8. Resuelve $\frac{x-1}{x+1}<\frac{x+1}{x-1}$

Unificamos en una sola fracción.

$$\frac{x-1}{x+1}<\frac{x+1}{x-1} \quad \rightarrow \quad \frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}<0 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1}<0 \quad \rightarrow \quad \frac{-4x}{x^2-1}<0$$

Raíz del numerador → $x=0$

Raíces del denominador → $x=\pm 1$

Evaluamos la fracción en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-1) \rightarrow x=-10 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1}>0$ → No cumple la desigualdad

$(-1,0) \rightarrow x=\frac{-1}{2} \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1}<0$ → Sí cumple la desigualdad

$(0,1) \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1}>0$ → No cumple la desigualdad

$(1,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1}<0$ → Sí cumple la desigualdad

Solución final → $(-1,0)\cup(1,+\infty)$