

Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 22 - Todos resueltos

■ Hoja 22. Problema 1

1. Representa gráficamente $y = |2x - 3| + |x - 1|$.

Rompemos el primer valor absoluto.

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Si $x < \frac{3}{2}$ $\rightarrow 2x - 3 < 0$ \rightarrow Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si $x > \frac{3}{2}$ $\rightarrow 2x - 3 > 0$

$$y = \begin{cases} -2x + 3 + |x - 1| & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 + |x - 1| & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Rompemos el segundo valor absoluto.

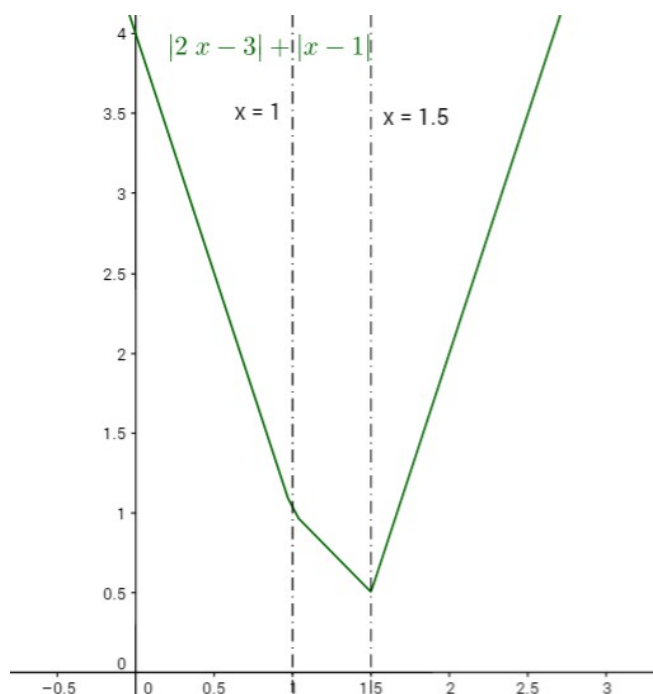
$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Si $x < 1$ $\rightarrow x - 1 < 0$ \rightarrow Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si $x > 1$ $\rightarrow x - 1 > 0$

$$y = \begin{cases} -2x + 3 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 3 + x - 1 & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 + x - 1 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -3x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 3x - 4 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

En cada tramo tenemos una recta, que podemos representar obteniendo un par de puntos en cada tramo. Con ayuda de Geogebra la gráfica quedaría:



Hoja 22. Problema 2

2. Un campesino tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15 el pienso duraría 3 días más y si comprase 25 el pienso duraría tres días menos. Halla el número de bueyes y el número de días que los puede alimentar.

x = número de bueyes

$k \cdot x$ = pienso total que comen los bueyes al día

d = número de días

$k \cdot x \cdot d$ = total de pienso que tiene el campesino

Primero, represento los datos que me dan obteniendo así un sistema de ecuaciones:

$$k \cdot x \cdot d = k(x - 15)(d + 3)$$

$$k \cdot x \cdot d = k(x + 25)(d - 3)$$

Operando y simplificando:

$$45 = 3x - 15d$$

$$75 = -3x + 25d$$

De la primera ecuación:

$$3x = 45 + 15d \rightarrow x = \frac{45}{3} + \frac{15d}{3} \rightarrow x = 15 + 5d$$

Y sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$75 = -3(15 + 5d) + 25d \rightarrow 75 = -45 - 15d + 25d \rightarrow 75 = -45 + 10d \rightarrow 120 = 10d \\ d = 12 \rightarrow x = 75$$

Bueyes que tiene el campesino = 75

Días que durará el pienso = 12

Hoja 22. Problema 3

3. Simplifica, indicando todas las operaciones.

$$\left(\frac{18x-9x^2}{9x^2-1} \cdot \frac{12x^2+2x-2}{4x^3-9x^2+2x} \right) : \frac{4x^2+6x+2}{12x^2+x-1}$$

Factorizamos y eliminamos términos poco a poco.

$$\left(\frac{18x-9x^2}{9x^2-1} \cdot \frac{12x^2+2x-2}{4x^3-9x^2+2x} \right) : \frac{4x^2+6x+2}{12x^2+x-1} \rightarrow \left(\frac{9x(2-x)}{9(x^2-\frac{1}{9})} \cdot \frac{2(6x^2+x-1)}{x(4x^2-9x+2)} \right) : \frac{2(2x^2+3x+1)}{12x^2+x-1}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x^2-\frac{1}{9})} \cdot \frac{(6x^2+x-1)}{(4x^2-9x+2)} \right) : \frac{(2x^2+3x+1)}{12x^2+x-1}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})} \cdot \frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)(x-\frac{1}{4})} \right) : \frac{(2x^2+3x+1)}{12(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{3})}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})} \cdot \frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)} \right) : \frac{(2x^2+3x+1)}{12(x+\frac{1}{3})} \rightarrow \left(\frac{(2-x)}{(x-\frac{1}{3})} \cdot \frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)} \right) : \frac{(2x^2+3x+1)}{12}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{1} \cdot \frac{6(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)} \right) : \frac{(2x^2+3x+1)}{12} \rightarrow \left(\frac{-1}{1} \cdot \frac{6(x+\frac{1}{2})}{4} \right) : \frac{(2x^2+3x+1)}{12}$$

$$\frac{-18(x+\frac{1}{2})}{2x^2+3x+1} \rightarrow \frac{-18(x+\frac{1}{2})}{2(x+1)(x+\frac{1}{2})} \rightarrow \frac{-9}{x+1}$$

Hoja 22. Problema 4

4. Resuelve
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{2+y} = 2 \\ \frac{x}{3} + 2y = 1 \end{cases}$$

En la primera ecuación del sistema, se deja x en un lado de la ecuación y se elevan ambas partes al cuadrado.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{2+y} + 2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (2 + \sqrt{2+y})^2 \rightarrow x = 4 + (2+y) + 4\sqrt{2+y} \\ x &= 6 + y + 4\sqrt{2+y} \end{aligned}$$

Con x despejada de la primera ecuación, la despejo también de la segunda.

$$\frac{x}{3} + 2y = 1 \rightarrow x = 3(1 - 2y)$$

Igualamos los valores de x .

$$\begin{aligned} 6 + y + 4\sqrt{2+y} &= 3(-2y + 1) \rightarrow 6 + y + 4\sqrt{2+y} = -6y + 3 \rightarrow (4\sqrt{2+y})^2 = (-3 - 7y)^2 \\ 16(2+y) &= 9 + 49y^2 + 42y \rightarrow 49y^2 + 26y - 23 = 0 \rightarrow y = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 49 \cdot (-23)}}{2 \cdot 49} \end{aligned}$$

$$y = \frac{-26 \pm 72}{98}$$

$$y_1 = \frac{-26 + 72}{98} = \frac{46}{98} = \frac{23}{49} \rightarrow \text{No es solución por no satisfacer el sistema inicial}$$

$$y_2 = \frac{-26 - 72}{98} = \frac{-98}{98} = -1 \rightarrow y = -1$$

Calculo x a partir de la solución de y .

$$\frac{x}{3} + 2y = 1 \rightarrow x = 3(-2y + 1) \rightarrow x = 3(2 + 1) \rightarrow x = 9 \rightarrow \text{Soluciones} \rightarrow \begin{pmatrix} y = -1 \\ x = 9 \end{pmatrix}$$

Hoja 22. Problema 5

5. Resuelve
$$\begin{cases} y - x = 3 \\ 5^x + 5^y = \frac{126}{5} \end{cases}$$

De la primera ecuación $\rightarrow y = x + 3$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema $\rightarrow 5^x + 5^{x+3} = \frac{126}{5} \rightarrow 5^x + 125 \cdot 5^x = \frac{126}{5}$

Cambio de variable $5^x = t \rightarrow t + 125 \cdot t = \frac{126}{5} \rightarrow 126 \cdot t = \frac{126}{5} \rightarrow t = \frac{1}{5}$

Deshacemos el cambio de variable $\rightarrow 5^x = \frac{1}{5} \rightarrow x = -1$

Y obtenemos la segunda incógnita $\rightarrow y = x + 3 \rightarrow y = 2$

Hoja 22. Problema 6

6. Resuelve
$$\left\{ \begin{array}{l} 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ \frac{1}{x-2} + 1 \leq \frac{3}{4-x^2} \end{array} \right.$$

Estudiamos la primera inecuación $\rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 \leq 0 \rightarrow$ Por Ruffini obtenemos sus raíces $\rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 = 6(x - \frac{1}{3})(x - 1)(x + 2)(x + \frac{1}{2})$

Evaluamos el polinomio en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -2) \rightarrow x = -10 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(-2, -\frac{1}{2}) \rightarrow x = -1 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \rightarrow x = 0 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(\frac{1}{3}, 1) \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

$$(1, +\infty) \rightarrow x = 10 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

Solución de la primera inecuación $\rightarrow [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$

Estudiamos la segunda inecuación $\rightarrow \frac{1}{x-2} + 1 \leq \frac{3}{4-x^2} \rightarrow$ unificamos en una única fracción $\rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)}$

Raíces del numerador $\rightarrow \nexists \mathbb{R}$

Raíces del denominador $\rightarrow x = \pm 2$

Evaluamos el cociente en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -2) \rightarrow x = -10 \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(-2, 2) \rightarrow x = 0 \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

$$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow x = 0 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

Solución de la segunda inecuación $\rightarrow (-2, 2)$

La solución final del sistema será la intersección de las soluciones particulares.

$$\text{Solución final} \rightarrow \left(-2, \frac{-1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

Hoja 22. Problema 7

7. Resuelve
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Despejamos x^2 en la primera ecuación $x^2 = 5 - y^2$. Llevamos este resultado a la segunda ecuación.

$$\frac{1}{5 - y^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{3}{4}$$

Calculamos un denominador común para las fracciones.

$$\begin{aligned} \frac{4y^2}{4y^2(5-y^2)} - \frac{4(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} &= \frac{3y^2(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} \rightarrow 4y^2 - 4(5-y^2) = 3y^2(5-y^2) \\ 4y^2 - 20 + 4y^2 &= 15y^2 - 3y^4 \rightarrow 3y^4 - 7y^2 - 20 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación bicuadrática la resolvemos con el cambio de variable $y^2 = t$.

$$3y^4 - 7y^2 - 20 = 0 \rightarrow 3t^2 - 7t - 20 = 0 \rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{6} \rightarrow t = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$t = \frac{-5}{3}, \quad t = 4$$

Si $t = \frac{-5}{3} \rightarrow y = \sqrt{\frac{-5}{3}} \notin \mathbb{R}$

Si $t = 4 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow$ solución válida

Si $y = 2$, $x^2 = 5 - y^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{5 - 4} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$ soluciones $(1, 2)$, $(-1, 2)$

Si $y = -2$, $x^2 = 5 - y^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{5 - 4} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$ soluciones $(1, -2)$, $(-1, -2)$

Hoja 22. Problema 8

8. Resuelve $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$

Unificamos en una sola fracción.

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{x^2-1} < 0 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} < 0$$

Raíz del numerador $\rightarrow x=0$

Raíces del denominador $\rightarrow x=\pm 1$

Evaluamos la fracción en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1) \rightarrow x=-10 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(-1, 0) \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

$$(0, 1) \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(1, +\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

Solución final $\rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$