Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 21 - Todos resueltos

Hoja 21. Problema 1

1. Mensualmente los socios de una peña quinielística juegan 520 €. Si hubiera siete socios más, aportarían 14 € menos.¿Cuántos socios hay en la peña y cuál es la cuota mensual que paga cada socio?

La incógnita x es el número de socios e y la cantidad de dinero que juega cada uno. Planteo un sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 520 \\ (x+7) \cdot (y-14) = 520 \end{cases}$$

Para resolver este problema despejaré x en la ecuación segunda y luego sustituiré el resultado en la ecuación primera. Es decir, usaré el método de sustitución:

$$(x+7) \cdot (y-14) = 520 \rightarrow xy + 7y - 14x - 98 = 520 \rightarrow x(y-14) = 618 - 7y$$

$$\frac{618-7y}{y-14} = x$$

Llevo este valor a la primera ecuación:

$$\frac{618-7y}{y-14} y = 520 \rightarrow 618y - 7y^2 = 520y - 7280 \rightarrow -7y^2 + 98y + 7280 = 0$$

$$y = \frac{-98 \pm \sqrt{98^2 - 4 \times (-7) \times 7280}}{2 \times (-7)} \rightarrow \begin{cases} y = 40 \\ y = -26 \end{cases}$$

Escojo la solución positiva, ya que no pueden pagar una cuota negativa. Y despejo x en la primera ecuación de partida:

$$x=\frac{520}{40} \quad \rightarrow \quad x=13$$

Es decir: $x=13\ socios$, $y=40€$ de cuota por cada socio.

Hoja 21. Problema 2

2. Calcula el valor de m en la ecuación $x^2+mx-(m^2+1)=0$ sabiendo que sus raíces se diferencian en 3 unidades.

$$x^2+mx-(m^2+1)=0 \rightarrow a=1 \ , \ b=m \ , \ c=-(m^2+1) \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4(m^2+1)}}{2} \rightarrow x=\frac{-m\pm\sqrt{5m^2+4}}{2}$$

$$x_1=\frac{-m+\sqrt{5m^2+4}}{2} \ , \ x_2=\frac{-m-\sqrt{5m^2+4}}{2} \rightarrow x_1-x_2=3$$

Sustituimos.

$$\frac{-m+\sqrt{5m^2+4}}{2}-\frac{-m-\sqrt{5m^2+4}}{2}=3 \rightarrow \frac{2\sqrt{5m^2+4}}{2}=3 \rightarrow \sqrt{5m^2+4}=3 \rightarrow 5m^2+4=9$$

$$5m^2=5 \rightarrow m=\pm 1$$

Si $m=1 \rightarrow x_1=1 \ , \ x_2=-2$

Si $m=-1 \rightarrow x_1=2 \ , \ x_2=-1$

Hoja 21. Problema 3

3. a) Resuelve $4^{x^2-6x}=16384$ **b) Resuelve** $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$

a) $4^{x^2-6x}=16384 \rightarrow 4^{x^2-6x}=4^7 \rightarrow$ Igualo exponentes $\rightarrow x^2-6x=7 \rightarrow x^2-6x-7=0$

Soluciones $\rightarrow x=-1$, $x=7$

b) $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0 \rightarrow 343\cdot 7^{2x}-56\cdot 7^x+1=0 \rightarrow$ cambio de variable $7^x=t$

$$343\cdot t^2-56\cdot t+1=0 \rightarrow t=\frac{56\pm\sqrt{56^2-4\cdot 343}}{2\cdot 343}=\frac{56\pm 42}{2\cdot 343} \rightarrow t=\frac{1}{7} \ , \ t=\frac{1}{49}$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$7^x=t \rightarrow 7^x=\frac{1}{7} \rightarrow 7^x=7^{-1} \rightarrow x=-1$$

$$7^x=t \rightarrow 7^x=\frac{1}{49} \rightarrow 7^x=7^{-2} \rightarrow x=-2$$

Hoja 21. Problema 4

4. Resuelve $\left\{\begin{matrix} \frac{2}{x-2}-\frac{x}{2+x}\leqslant\frac{-7}{4-x^2} \\ x^2>1 \end{matrix}\right\}$

Resolvemos cada inecuación por separado, y luego haremos la intersección de las soluciones individuales.

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x}{2+x}\leqslant\frac{-7}{4-x^2} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{x-2}-\frac{x}{2+x}+\frac{7}{4-x^2}\leqslant 0$$

$$4-x^2=(2-x)(2+x)=-(x-2)(x+2)$$

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x}{x+2}-\frac{7}{(x-2)(x+2)}\leqslant 0$$

Unificamos en una sola fracción.

$$\frac{2(x+2)-x(x-2)-7}{(x-2)(x+2)}\leq 0 \quad\rightarrow\quad \frac{2x+4-x^2+2x-7}{(x-2)(x+2)}\leq 0 \quad\rightarrow\quad \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)(x+2)}\leq 0$$

Raíces del numerador → $-x^2+4x-3=0 \;\rightarrow\; x=1 \;,\; x=3$

Raíces del denominador → $(x+2)(x-2)=0 \;\rightarrow\; x=2 \;,\; x=-2$

Evaluamos el signo de la fracción de la inecuación en los siguientes intervalos (ojo con la factorización del numerador $-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$).

$(-\infty,-2) \;\rightarrow\; x=-10 \;\rightarrow\; \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)}<0$ → Sí cumple la inecuación

$(-2,1) \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)}>0$ → No cumple la inecuación

$(1,2) \;\rightarrow\; x=\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)}<0$ → Sí cumple la inecuación

$(2,3) \;\rightarrow\; x=\frac{5}{2} \;\rightarrow\; \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)}>0$ → No cumple la inecuación

$(3,+\infty) \quad \rightarrow \quad x=10 \quad \rightarrow \quad \frac{-(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)}<0$ → Sí cumple la inecuación

La solución particular de la primera inecuación es $(-\infty,-2)$ U [1, 2) U [3, ∞).

Estudiamos la segunda inecuación.

$x^2>1 \quad \rightarrow \quad x^2-1>0$ → Raíces $x=\pm 1$

Evaluamos en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-1) \quad \rightarrow \quad x=-10 \quad \rightarrow \quad x^2-1>0$ → Sí cumple la inecuación
$(-1,1) \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1<0$ → No cumple la inecuación
$(1,+\infty) \quad \rightarrow \quad x=10 \quad \rightarrow \quad x^2-1>0$ → Sí cumple la inecuación

La solución particular de la segunda inecuación es $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

La solución final del sistema es la intersección de las dos soluciones particulares. Es decir:

$(-\infty,-2)\cup(1,2)$ U [3,+∞)

Hoja 21. Problema 5

5. Calcula el valor de m en la ecuación $x^2+mx-(m^2+1)=0$ sabiendo que sus raíces se diferencian en 3 unidades.

Ver ejercicio 2 de esta hoja.

Hoja 21. Problema 6

6. Resuelve $\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}+\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$

Aplicamos mínimo común múltiplo.

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}+\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2} \rightarrow \frac{4x+36+x-12\sqrt{x}}{(6-\sqrt{x})2\sqrt{x}}=\frac{5}{2} \rightarrow \frac{5x+36-12\sqrt{x}}{12\sqrt{x}-2x}=\frac{5}{2}$$

$$10x+72-24\sqrt{x}=60\sqrt{x}-10x \rightarrow 20x+72=84\sqrt{x}$$

Elevamos ambos términos al cuadrado.

$$400x^2+5184+2880x=7056x \rightarrow 400x^2-4176x+5184=0$$

Simplifico dividiendo por 2 .

$$200x^2-2088x+2592=0 \rightarrow x=\frac{2088\pm\sqrt{2088^2-4\cdot 200\cdot 2592}}{400}$$

$$x=\frac{2088\pm 1512}{400} \rightarrow x=9 \quad , \quad x=\frac{36}{25}$$

Ninguna de estas soluciones hace negativo el discriminante de las raíces de partida, y satisfacen la ecuación. Ambos valores son la solución.

Hoja 21. Problema 7

7. Representa gráficamente $y=|2x-3|+|x-1|$ **.**

Rompemos el primer valor absoluto.

$$2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Si $x<\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad 2x-3<0 \quad \rightarrow$ Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si $x>\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad 2x-3>0$

$$y=\begin{cases} -2x+3+|x-1| & si \quad x\leq\frac{3}{2} \\ 2x-3+|x-1| & si \quad x>\frac{3}{2} \end{cases}$$

Rompemos el segundo valor absoluto.

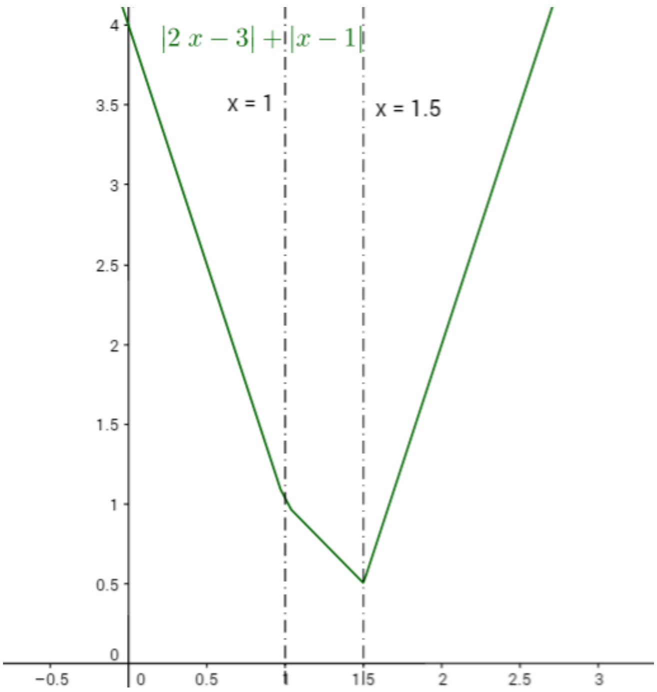
$$x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

Si $x<1 \quad \rightarrow \quad x-1<0 \quad \rightarrow$ Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si $x>1 \quad \rightarrow \quad x-1>0$

$$y=\begin{cases} -2x+3-x+1 & si \quad x\leq 1 \\ -2x+3+x-1 & si \quad 1<x\leq\frac{3}{2} \\ 2x-3+x-1 & si \quad x\geq\frac{3}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad y=\begin{cases} -3x+4 & si \quad x\leq 1 \\ -x+2 & si \quad 1<x\leq\frac{3}{2} \\ 3x-4 & si \quad x\geq\frac{3}{2} \end{cases}$$

En cada tramo tenemos una recta, que podemos representar obteniendo un par de puntos en cada tramo. Con ayuda de Geogebra la gráfica quedaría:


|2 x − 3| + |x − 1|
x = 1
x = 1.5

Hoja 21. Problema 8

8. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los puntos de corte de las rectas que delimitan la zona solución.

$$\left\{\begin{matrix} 5x+y\leq 5 \\ 3x-2y\leq 4 \\ \dfrac{x}{2}-y>0 \end{matrix}\right\}$$