Problemas – Tema 1

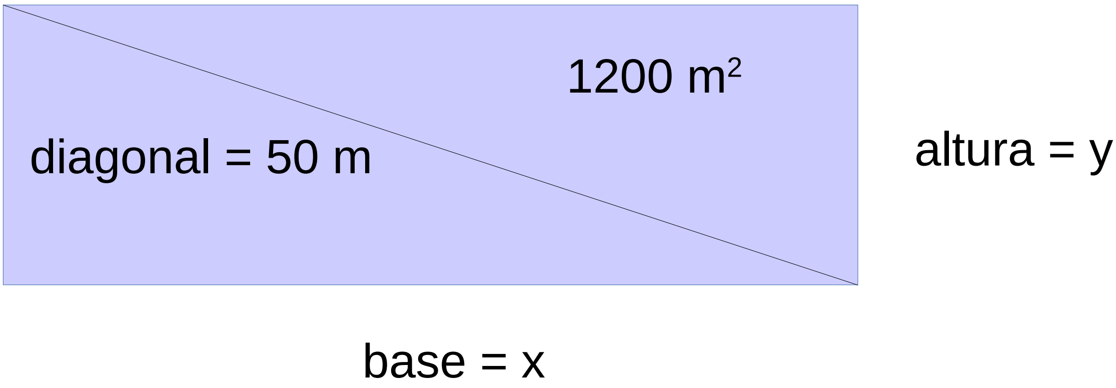
Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 02 - Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

1. Calcula las dimensiones de un solar rectangular de superficie 1.200 m^2 y de diagonal 50 m.

$base = x$

$altura = y$



$Superficie = base \cdot altura \quad \rightarrow \quad 1200\, m^2 = x \cdot y$

Aplicando el teorema de Pitágoras en la diagonal → $x^2+y^2=502$ → Generándose un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1200}{y} \\ x^2+y^2=50^2 \end{array} \right\}$$

Sustituimos el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$y^4 - 2500\, y^2 + 1440000 = 0$$

Tenemos una ecuación bicuadrática que resolvemos con el cambio de variable $t=y2$.

$$t^2-2500t+1440000=0$$
$$t_1=1600$$
$$t_2=900$$

No debemos olvidar invertir el cambio de variable realizado inicialmente, con objeto de obtener los valores de la incógnita y de partida.

$$y=\pm\sqrt{1600}\rightarrow y_1=40,\quad y_2=-40$$
$$y=\pm\sqrt{900}\rightarrow y_3=30,\quad y_4=-30$$

Nos quedamos con los valores positivos, ya que físicamente tienen sentido distancias positivas. Para cada valor de y debemos calcular el correspondiente valor de x que satisface el sistema.

$$Si\quad y=40\ m\ \rightarrow x=30\ m$$
$$Si\quad y=30\ m\ \rightarrow x=40\ m$$

Hoja 2. Problema 2

2. Calcula las raíces de $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

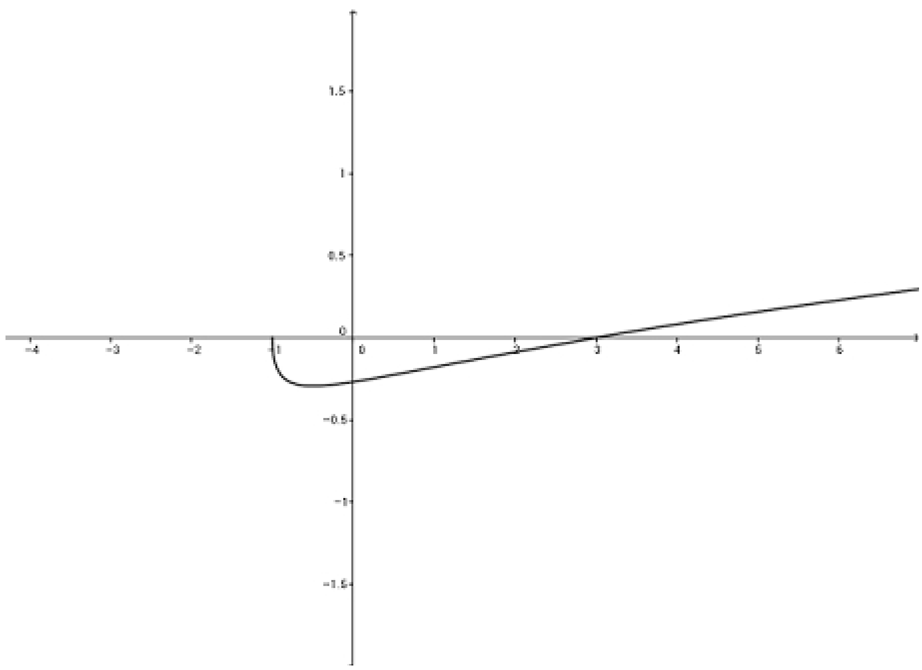
Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$(2x+3)+(x+1)-2\sqrt{(2x+3)(x+1)}=1$$
$$3x+3=2\sqrt{(2x+3)(x+1)}$$

Volvemos a aplicar cuadrados en ambos miembros de la igualdad.

$$9x^2+18x+9=4(2x^2+5x+3)$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$
$$x_1=3$$
$$x_1=-1$$

Ambas soluciones satisfacen la ecuación de partida y no hacen negativos los discriminantes de las raíces, por lo que son soluciones válidas a nuestro problema.



Hoja 2. Problema 3

3. Resuelve el sistema $\begin{Bmatrix} x-y+z=3 \\ x^2+y=7 \\ xy+z=10 \end{Bmatrix}$

De la primera ecuación despejamos el valor de $z \rightarrow z=3-x+y$, que sustituimos en las otras dos ecuaciones, generando un nuevo sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} x^2+y=7 \\ x\,y+(3-x+y)=10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x^2+y=7 \\ x=\dfrac{7-y}{y-1} \end{Bmatrix}$$

El valor de x de la segunda ecuación lo llevamos a la primera.

$$\left(\frac{7-y}{y-1}\right)^2+y=7$$

$$y^3-8\,y^2+y+42=0$$

Descomponemos por Ruffini, probando las raíces $y=-2, y=3, y=7$, que son divisores del término independiente del polinomio.

$$(y-3)(y-7)(y+2)=0$$
$$si \quad y=3 \rightarrow x=2 \rightarrow z=4$$
$$si \quad y=7 \rightarrow x=0 \rightarrow z=10$$
$$si \quad y=-2 \rightarrow x=-3 \rightarrow z=4$$

Hoja 2. Problema 4

4. Encuentra una ecuación bicuadrática cuyas raíces sean:

a) $2, -2, 3, \frac{1}{3}$

b) $1, 2$

a) Una ecuación bicuadrática general del tipo $a x^4 + b x^2 + c = 0$ se resuelve planteando el cambio de variable $t = x^2$.

De esta forma las soluciones para t cumplen $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, por lo que t toma $1\, ó\, 2$ valores solución distintos como máximo.

Asimismo, al deshacer el cambio de variable, las soluciones para x cumplen $x = \pm\sqrt{t}$, por lo que x toma $2\, ó\, 4$ valores solución distintos como máximo. Y si son 4 soluciones distintas, se diferencian en el signo dos a dos (iguales en módulo y con signo opuesto).

El apartado *a)* plantea 4 soluciones distintas, donde $2\, y -2$ son iguales en módulo pero con signo opuesto. Sin embargo los valores $3\, y \frac{1}{3}$ no son iguales en módulo ni tienen signo opuesto.

Por lo tanto, llegamos a un absurdo. Podemos concluir que no existe ninguna ecuación bicuadrática cuyas cuatro raíces reales puedan ser $2, -2, 3, \frac{1}{3}$.

b) Si $1\, y\, 2$ son soluciones del polinomio $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ satisfacen:

$$P(1) = 0$$
$$P(2) = 0$$

Por lo tanto:

$$P(1) = a + b + c = 0$$
$$P(2) = 16a + 4b + c = 0$$

Tendremos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que gozamos de un grado de libertad para dar, arbitrariamente, un valor no nulo a alguna de las incógnitas.

Por ejemplo:

$a=1$

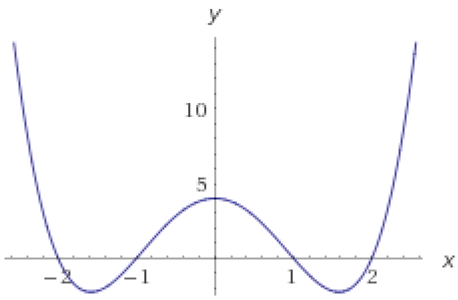
De esta forma nuestro sistema se reduce a:

$$\begin{cases} b+c=-1 \\ 4b+c=-16 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos $c=-1-b$, que sustituimos en la segunda.

$$3b=-15$$
$$b=-5 \rightarrow c=4$$

De esta forma el polinomio $P(x)=x^4-5x^2+4$ satisface las condiciones del enunciado, como podemos verificar en la siguiente gráfica.



Hoja 2. Problema 5

5. Halla los valores de m para que la ecuación $x^2-(2m+1)x+(3m+1)=0$ tenga una raiz 3 unidades superior que la otra. Calcula las raíces de dicha ecuación.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a=1$$
$$b=-(2m+1)$$
$$c=3m+1$$
$$x=\frac{(2m+1)}{2}\pm\frac{\sqrt{4m^2-8m-3}}{2}$$
$$x_1=\frac{(2m+1)}{2}+\frac{\sqrt{4m^2-8m-3}}{2}$$
$$x_2=\frac{(2m+1)}{2}-\frac{\sqrt{4m^2-8m-3}}{2}$$

Por las condiciones del enunciado sabemos que la diferencia entre las dos raíces debe ser 3 unidades.

$$x_1=x_2+3$$
$$\sqrt{4m^2-8m-3}=3$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$m^2-2m-3=0$$
$$m_1=-1\rightarrow x_1=1, x_2=-2$$
$$m_2=3\rightarrow x_1=2, x_2=5$$

Para cada valor de m obtenemos una pareja de soluciones válidas para nuestra ecuación de partida.

Hoja 2. Problema 6

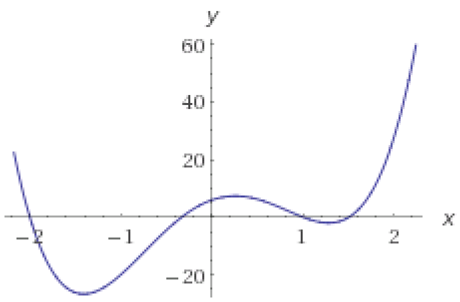
6. Factoriza el polinomio $P(x)=6x^4-x^3-22x^2+11x+6$

Vamos a factorizar por Ruffini. Los números candidatos a ser solución son los divisores del término independiente y/o los divisores del término independiente divididos entre los divisores del coeficiente del término de mayor grado del polinomio (esto último será muy útil para los casos en que existan raíces racionales).

Factorizando para los valores $x=1, x=-2, x=\frac{-1}{3,} x=\frac{3}{2}$, y sin olvidar al coeficiente que acompaña al término de mayor grado:

$$P(x)=6(x-1)(x+2)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3}{2})$$

La gráfica de este polimio de cuarto grado es la siguiente.

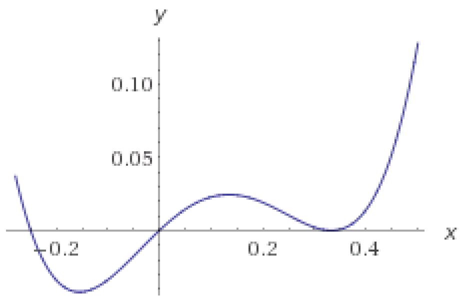


Hoja 2. Problema 7

7. Calcula las raíces de la ecuación $12x^4-5x^3-\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{3}=0$

Factorizando Ruffini, y representando la gráfica encontramos soluciones para $x=0$, $x=\frac{-1}{4}$, $x=\frac{1}{3}$ (raíz doble).

$$12x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$$



Hoja 2. Problema 8

8. Calcula el m.c.m y el M.C.D. de los siguientes polinomios:

$$P(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$$
$$Q(x)=x^4-5x^3-3x^2+13x+10$$

Factorizando por Ruffini:

$$P(x)=(x+1)^3(x-2)^2$$
$$Q(x)=(x+1)^2(x-2)(x-5)$$

Para el m.c.m tomamos los comunes y no comunes con mayor exponente.

$$m.c.m.=(x+1)^3(x-2)^2(x-5)$$

Para el M.C.D. tomamos los comunes con menor exponente.

$$M.C.D.=(x+1)^2(x-2)$$