Problemas – Tema 9

Enunciados de problemas sobre derivadas

Hoja 1

1. a) Deriva y simplifica $f(x)=\dfrac{2}{7\cdot\cos^7(2x+1)}$

b) Deriva y simplifica $f(x)=\dfrac{x^2+\cos(x)}{e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}}$

c) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$

2. a) Calcula el número real m que cumple $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$

b) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de $f(x)=\ln(1-x^2)$

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=e^{-x^2}$

4. Una compañía de cruceros ofrece un viaje para al menos 100 personas por un precio inicial de 2000 euros por persona.

Para animar las ventas decide rebajar el precio inicial en 10 euros por cada persona que rebase las 100. Así pues, si se apuntaran 120 personas, cada uno pagará 2000 – 20·10 = 1800 euros.

Calcula el número de personas que maximiza los ingresos de la compañía y el valor de dicho ingreso máximo.

Hoja 2

1. a) Deriva y simplifica $f(x)=\dfrac{-2}{\ln^3(1-2x)}$

b) Deriva y simplifica $f(x)=\ln\left(e^{tg(x)}\cdot\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right)$

c) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

2. a) Determina el punto (x,y) de la función $f(x)=x^3-x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74 .

b) Calcula a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de 45^{o} con el eje OX.

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$

4. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

Hoja 3

1. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=5x^2-4x+7$

b) $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2-21x-1$

c) $f(x)=x^3+3x^2-24x-3$

2. Halla la ecuación explícita de la recta tangente a la curva $y=3x^2-5x+6$ en:

a) $x_0=-3$

b) En el punto cuya abscisa es la misma que la del punto medio del segmento de extremos $A(1,4)$ y $B(-3,6)$.

c) En el punto cuya abscisa cumple $y'=7$.

d) En el punto en que dicha tangente es paralela al eje de abscisas.

e) En el punto en que dicha tangente es paralela a la bisectirz del primer y tercer cuadrante.

3. Utilizando la definición formal de derivada, demuestra que $f(x)$ y $g(x)=f(x)+c$ (con $c\in\mathbb{R}$) tienen la misma derivada.

4. Una bacteria ha infectado a un número de personas que viene dado por la función $f(x)=210-2x^2-x$, siendo x el número de días transcurridos desde que se detecta la enfermedad.

¿Cuál es la variación media del número de personas infectadas entre el tercer y el quinto día transcurridos desde la detección de la enfermedad.

5. Determina los valores a,b,c de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ para que tenga un mínimo relativo en $x=2$, pase por el punto $P(0,5)$ y $f'(1)=2$.

6. Determina a,b,c para que la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ tenga el vertici en el punto $(2,-4)$ y su segunda derivada en $x=2$ valga 4 .

7. Determina a,b,c de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ para que tenga una recta tangente en el punto $(1,-2)$ cuya pendiente valga 2 , y cumplaque su segunda derivada en el punto $x=0$ valga 4 .

Hoja 4

1. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$ en los que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

2. Determina en qué punto de la gráfica de la función $f(x)=3\sqrt{6x}$, la recta tangente forma un ángulo de 45^o con el eje de abscisas.

3. ¿En qué punto la tangente a la gráfica de $f(x)=x^2-5x+6$ es paralela a la bisectirz del segundo cuadrante.

4. Calcula la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones, en los puntos que se indican.

a) $f(x)=\cos(x)$ en $x=\pi$

b) $f(x)=x^4+3$ en $x=-4$

c) $f(x)=2x^4-4x^2$ en $x=\frac{1}{2}$

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=sen(x^3+x+2)$

b) $f(x)=tg(\frac{1}{x^2})$

c) $f(x)=\cos(\cos(x))$

6. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=sen(\ln(x^2+1))$

b) $f(x)=sec^2(x^3)$

c) $f(x)=\ln^3[sen(x^2+5)]$

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=arcosen(\sqrt{1-x^2})$

b) $f(x)=sen^3[\ln(2^{x^2+5})]$

c) $f(x)=cotg(x^3+1)^2$

Hoja 5

1. Una lata de refresco tiene un volumen de $333\,cm^3$. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.

2. En un triángulo isósceles ABC con $AB=AC$, $BC=4$ y de altura sobre BC igual a 1 , ¿dónde debemos escoger un punto de dicha altura para la suma de las tres distancias a los vértices sea mínima?

3. Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de $6\,m$, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.

4. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro $50\,cm$ que tenga la mayor área posible.

5. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

6. Un artista ha adquirido un listón de $6\,m$ de largo del que quiere colgar dos grandes telas, una a continuación de la otra y que ocupen todo el largo del listón.

La primera ha de ser naranja, y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del ladoque cuelga. La segunda será verde y debe tener forma cuadrada.

¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?

7. Sea $y=\frac{1}{x}$. Demuestra que en un punto arbitrario de su gráfica, el segmento de recta tangente limitado por los ejes de coordenadas tiene como punto medio el punto de tangencia.

8. Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y=x^2$ que sean paralelas a la recta que une los puntos de abscisas $x=1$ y $x=3$ de la gráfica.

9. Sea la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y=\sqrt{x}$, $x=9$, $y=0$ y calcula las dimensiones del rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes y que tenga:

a) Área máxima

b) Perímetro máximo

Hoja 6

1. Estudia y representa $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

2. Estudia y representa $f(x)=\frac{2x^2-x-3}{x}$

3. Estudia y representa $f(x)=x\cdot e^x$

4. Estudia y representa $f(x)=2\cdot sen(2x)$

5. Estudia y representa $f(x)=x+e^{-x}$

6. Estudia y representa $f(x)=\ln(x+1)$

7. Estudia y representa $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

8. Estudia y representa $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$

9. Estudia y representa $f(x)=\frac{x^3}{4x^2+1}$

10. Estudia y representa $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$

Hoja 7

1. a) Deriva $f(x)=\frac{-2}{\ln^3(1-2x)}$

b) Calcula la ecuación explícita de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)=arcotg(x)$ en el punto de valor de abscisa $x=1$.

2. a) Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

b) Calcula la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x)=x\cdot e^{\frac{-x}{2}}$

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

4. Una compañía de cruceros ofrece un viaje para al menos 100 personas por un precio inicial de 2000 euros por persona.
Para animar las ventas decide rebajar el precio inicial en 10 euros por cada persona que rebase las 100. Así pues, si se apuntaran 120 personas, cada uno pagará 2000 – 20·10 = 1800 euros.

Calcula el número de personas que maximiza los ingresos de la compañía y el valor de dicho ingreso máximo (ayuda: el ingreso es el dinero total obtenido por la compañía).

5. a) Indica los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos de $f(x)=\ln(1-x^2)$

b) Calcula $\lim_{x\to\infty}\frac{4e^x+x+2}{3e^x}$

6. Aplica la definición formal de derivada a $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

7. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$

8. a) Determina los valores a,b,c de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ para que tenga un mínimo relativo en $x=2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1)=2$.

b) Determina en qué punto de la gráfica de la función $f(x)=3\sqrt{6x}$, la recta tangente forma un ángulo de 45^o con el eje de abscisas.

Hoja 8

1. a) Deriva $f(x)=arcosen(\sqrt{1-x^2})$

b) Determina el punto (x,y) de la función $f(x)=x^3-x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74 .

2. a) Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{sen(2x)}$

b) Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en $x=-2$

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

4. Una lata de refresco cilíndrica tiene un volumen de $333\,cm^3$. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible (ayuda: el volumen de un cilindro se calcula como el área de la base por la altura. Y el área de la cara lateral del cilindro es el perímetro de la base por la altura).

5. a) Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}\right)$

b) Estudia las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$

6. Aplica la definición formal de derivada a $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

7. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

8. a) Determina a,b,c para que la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ tenga el mínimo absoluto en el punto $(2,-4)$ y su segunda derivada en $x=2$ valga 4 .

b) Calcula el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de $f(x)=x^3-x$