Problemas – Tema 6

Enunciados de problemas sobre rectas y cónicas

Hoja 1

1. Expresa la siguientes rectas.

a) Ecuación continua y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(3,2)$ y con vector director $\vec{v}=(1,4)$.

b) Ecuación canónica que pasa por $A(5,0)$ y $B(0,4)$.

c) Ecuación paramétrica que pasa por $A(2,1)$ y de pendiente $m=\frac{3}{5}$.

2. Dado el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,2)$ y $C(4,6)$ obtener ecuación de la mediana que pasa por A (la mediana es la recta que une un vértice con el punt medio del lado opuesto).

3. ¿Están alineados los puntos $A(-10,0)$, $B(0,3)$ y $C(6,5)$?

4. Halla las ecuaciones generales de las posibles rectas que, pasando por el punto $P(6,0)$, formen con los ejes cartesianos un triángulo de 12 unidades cuadradas.

5. Sea el segmento de extremos $A(8,2)$ y $B(-1,-4)$. Halla las ecuaciones de las dos rectas que dividen al segmento en tres partes iguales y pasan por $P(-3,0)$.

6. Escribe la ecuación de la recta que pasando el punto medio del segmento de extremos $A(1,7)$ y $B(5,5)$, forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo de 60º.

7. Sean las rectas $r: 3x-4y-12=0$ y $s: 4x+3y+12=0$.

a) Represéntalas gráficamente.

b) Halla sus pendientes.

Hoja 2

1. Expresa la siguientes rectas.

a) Ecuación general que pasa por $A(2,1)$ y $B(3,5)$.

b) Ecuación paramétrica que pasa por $B(4,-1)$ y de vector director $\vec{v}=(2,5)$.

c) Ecuación paramétrica de la recta $r: x-4y+8=0$.

2. Sea r la recta que, pasando por $A(-2,1)$, forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de abscisas.

Sea s la recta que, pasando por $P(5,-2)$, forma un ángulo de 135º con el semieje positivo de abscisas.

Escribe sus ecuaciones generales y paramétricas. Halla el punto de intersección de ambas rectas.

3. Sea el paralelogramos de vértices consecutivos $A(0,0)$, $B(7,1)$ y $C(3,9)$. Hallar las coordenadas del cuarto vértice y las ecuaciones de sus dos diagonales.

4. Dada la recta $r: x-3y+6=0$, halla el área del triángulo que forma con los ejes cartesianos.

5. Dada la recta de ecuación $r: x-2y+k=0$ calcula los valores de k para que:

a) La recta pase por el punto $A(5,3)$.

b) La recta forme con los ejes cartesianos un triángulo de $4\ u^2$.

6. Las rectas $r: 3x-4y-12=0$, $s: 2x+3y-6=0$ y $t: y=-3$ forman un triángulo. Calcula:

a) Las coordenadas de sus vértices.

b) Las ecuaciones de las tres medianas.

7. Sea $r: 2x+7y-3=0$.

a) Obtener una recta paralela a r que pase por el punto $P(1,5)$.

b) Obtener una recta perpendicular a r que pase por el punto $P(1,5)$.

Hoja 3

1. Dado el segmento de extremos $A=(-7,3)$ y $B=(5,11)$, halla la ecuación de su mediatriz.

2. Halla la distancia del punto $P(1,0)$ a la recta $r:\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

3. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta de ecuación $r:3x-4y+10=0$.

4. Sea el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,3)$ y $C(1,8)$. Hallar el área del triángulo.

5. Dada la recta $r:x-2y=0$, hallar los extremos del segmento simétrico al segmento $\vec{AB}$ respecto de la recta($A(0,3)$, $B(-1,5)$).

6. La recta r corta a los ejes OX y OY en los puntos P y Q . Sabemos que $|\vec{OP}|=3\cdot|\vec{OQ}|$. Halla la ecuación de la recta sabiendo que pasa por el punto $A(2,5)$.

7. Los puntos $P(2,3)$ y $Q(-4,1)$ son simétricos respecto cierta recta. Halla la ecuación de esa recta.

8. Sea $r:x-3y+6=0$. Encontrar:

a) La ecuación de su recta simétrica respecto al eje de abscisas.

b) La ecuación de su recta simétrica respecto al eje de ordenadas.

9. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $r:x+y-3=0$ y $s:x+y+7=0$.

10. Calcula las ecuaciones de las posibles rectas que, siendo paralelas a $r:x-2y-3=0$, distan 5 unidades del origen de coordenadas.

11. Un triángulo tiene sus lados sobre las rectas $r:x=0$, $s:y=0$, $t:3x+4y-12=0$. Calcular:

a) Ortocentro (punto de corte de las alturas).

b) Circuncentro (punto de corte de las mediatrices).

c) Baricentro (punto de corte de las medianas).

Hoja 4

1. Halla el simétrico del punto $A(1,1)$ respecto de la recta de ecuación $r: x-3y-12=0$.

2. Dado el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(10,2)$ y $C(6,8)$:

a) Hallar las coordenadas del ortocentro (corte de las alturas; una altura es perpendicular a un lado del triángulo, o a su proyección, y pasa por el vértice opuesto a ese lado).

b) Hallar las coordenadas del circuncentro (corte de las mediatrices).

3. Encontrar el punto de la recta equidistante a los puntos $A(1,6)$ y $B(5,2)$.

4. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $r: 3x-4y+5=0$ y $s: 3x-4y-15=0$.

5. Calcular la ecuación de las rectas que pasando por el punto $P(2,-7)$ es:

a) Paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) Perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

6. El lado desigual de un triángulo isósceles tiene por extremos $A(-1,-1)$ y $B(4,0)$. El tercer vértice C se encuentra sobre la recta $r: x-2y+8=0$.

a) Determinar C .

b) La longitud de la altura que parte de C .

c) El área del triángulo.

7. Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos $A(3,5)$ y $C(2,1)$. El vértice B está sobre el eje de ordenadas. Encontrar las coordenadas de B y D .

8. Un punto dista lo mismo de $A(6,2)$ y de $B(-4,8)$. Su distancia al eje OX es el doble de la distancia al eje OY . Determina el punto.

9. Obtener ecuación de la recta que, formando un ángulo de 30º con el semieje positivo de abscisas, diste 8 unidades del origen de coordenadas.

10. Obtener ecuación de la mediatriz del segmento determinado por el punto $A(3,0)$ y por el punto de corte de la perpendicular trazada desde A a la recta $r: x-2y+6=0$.

Hoja 5

1. Sean los puntos $A(-2,-1)$ y $B(7,5)$. Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que forman con ambos puntos un triángulo de 36 unidades cuadradas de área.

2. Hallar el lufar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(1,4)$ y $B(3,-2)$.

3. Halla la ecuación de una circunferencia tal que los puntos $A(2,-1)\, y\, B(4,5)$ formen uno de sus diámetros.

4. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,0), B(0,2)\, y\, C(2,4)$.

5. Halla la ecuación de la circunferencia que sea concéntrica con $C: 2x^2+2y^2-6x+8y-5=0$ y tangente a la recta $r: 4x-3y+8=0$.

6. Determina la posición relativa de la circunferencia $C: x^2+y^2-2x-4y-1=0$ y la recta $r: x-y-1=0$

7. Determina la posición relativa de las siguientes circunferencias:

$$C_1: x^2+y^2-6y+7=0$$

$$C_2: x^2+y^2-6x+1=0$$

8. El semieje mayor de una elipse mide 5 unidades, y la distancia focal 6 unidades. Halla la ecuación de la elipse y encuentra un punto que pertenezca a la elipse.

9. Sea la cónica $x^2+y^2-2x-4y=0$. Halla las ecuaciones de las recta tangente y normal a dicha cónica en el punto de abscisa $x=2$ y ordenada positiva.

10. Determina la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-1,7)$ y radio 4. Dibuja la cónica con Geogebra.

11. Halla la ecuación de la circunferencia con centro $C(2,3)$ que es tangente al eje de abscisas.

Hoja 6

1. Halla el centro y el radio de las circunferencias que tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2\ y^2-4x-2y+2=0$

b) $x^2+y^2+2x+8y+1=0$

c) $4x^2+4y^2-4x+8y-31=0$

2. Calcula la distancia entre los centros de las siguientes circunferencias:

$C_1: x^2+y^2+8x-2y+12=0$

$C_2: x^2+y^2-6y=0$

3. Calcula la potencia de los puntos $A(0,0), B(5,1)\ y\ C(4,0)$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2=16$ e indica las posiciones relativas respectivas.

4. Determina los puntos de intersección de la recta $r: x-y+1=0$ y la circunferencia $C: x^2+y^2+4x-4y-1=0$. Dibuja la solución con Geogebra.

5. Para que valor de m la recta $x-y+m=0$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2=9$. Dibuja la solución con Geogebra, usando un deslizador para el parámetro m .

6. Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=25$ que son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.

7. Determina la ecuación de la elipse tal que la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos a los focos $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$ sea 6.

8. Se sabe que el foco de una elipse es $F(0,-2)$ y que su excentricidad es $e=\frac{2}{5}$. Obtén la ecuación de dicha elipse, suponiendo que está centrada en el origen de coordenadas.

9. Halla el centro y los semiejes de la elipse $x^2+2y^2+2x+4y+1=0$, con ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

10. Obtener la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ que pase por el punto $A(3,0)$

Hoja 7

1. Sea la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 2 . Sea el punto $P(2,5)$. Obtener los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por P (Ayuda: si dibujas primero la circunferencia, la posición del punto P respecto al centro puede facilitar los cálculos).

2. Sea la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y+3=0$. Determinar si los siguientes puntos son externos, internos o pertenecientes a la circunferencia.

a) $(3,0)$

b) $(1,-2)$

c) $(3,1)$

3. Sea la circunferencia centrada en $C(0,2)$ y que pasa por el punto $P(5,0)$. Formamos el vector $\vec{OP}$ y lo hacemos girar $\frac{\pi}{3}$ radianes en sentido antihorario hasta formar el vector $\vec{OQ}$.

a) ¿Cuáles es el módulo de $\vec{OQ}$?

b) ¿Cuáles son las coordenadas de Q ?

4. Busca los datos del radio de la Tierra y de la Luna. Representa en Geogebra dos circunferencias, a escala, que muestren a la Tierra en el origen de coordenadas y a la Luna girando alrededor (la distancia Tierra-Luna no es necesario que esté a escala).

La Luna debe girar alrededor de la Tierra en movimiento circular, realizando un giro completo en un minuto de animación. Debes entregar archivo .ggb con la animación en Geogebra

5. Representa en Geogebra dos circunferencias, a escala, que muestren al Sol y a la Tierra. No deben estar a escala.

La Tierra debe girar alrededor del Sol en movimiento elíptico, con el Sol en uno de los focos, realizando un giro completo en treinta segundos de animación. Debes entregar archivo .ggb con la animación en Geogebra.

6. Sea la circunferencia de diámetro $A(-2,-1)\,y\,B(6,3)$. Sea C el centro de la circunferencia. El sector circular formado por CBD tiene $40\,u^2$ de área. Obtener coordenadas del punto D .

Hoja 8

1. Qué figura geométrica forman los puntos del plano que se encuentran a potencia igual a 50 respecto la circunferencia centrada en el origen y de radio 3 .

2. Sea la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y que pasa por el punto $A(3,3)$. El punto A es uno de los vértices de un triángulo equilátero inscrito dentro de la circunferencia. Obtener las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo.

3. Halla la ecuación de la elipse de foco F(7, 2), vértice A(9, 2) y centro C(4, 2).

4. Dada la elipse $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ hallar sus focos, sus vértices y su centro.

5. Determina la ecuación de la elipse centrada en el origen sabiendo que uno de los vertices dista 8 de un foco y 18 del otro foco.

6. Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas que pasa por $(0,4)$ y excentricidad $e=\frac{3}{5}$.

7. Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenaas que pasa por $(2,1)$ y cuyo eje menor mide 4.

8. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6, respectivamente. Calcular la ecuación de dicha elipse si el centro coincide con el origen de coordenadas.

Hoja 9

1. Escribe la ecuación de la elipse centrada en el origen que pasa por los puntos $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta $x+2y-1=0$ en la elipse de ecuación $x^2+2y^2=3$.

3. Determina la ecuación de una elipse centrada en el origen cuya distancia focal es $8\sqrt{6}$ y sabiendo que está inscrita en un rectángulo de área $80u^2$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(3,1)$ y es tangente a la recta $3x-4y+5=0$.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)\,y\,B(-2,3)$ y tiene su centro sobre la recta $x+y+4=0$.

6. Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(0,-3)$, cuyo radio es $\sqrt{5}$ y cuyo centro se halla en la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

7. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas $x+3y+3=0$, $x+y+1=0$ y su radio es igual a 5 .

8. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la de ecuación $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ y que pasa por el punto $(-3,4)$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(0,0),B(3,1),C(5,7)$.

Hoja 10

1. Estudiar la posición relativa de la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y-20=0$ con las rectas:

a) $x+7y-20=0$

b) $3x+4y-27=0$

c) $x+y-10=0$

2. Un cuadrado tiene un vértice $A(-1,1)$ y su centro en $O(1,1)$. Calcula las coordenadas de los otros vértices.

3. Sea el triángulo de vértices A(1, 3), B(2, -2) y C(4, 1). Obtener la longitud de la altura sobre el lado AB.

4. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas:

a) $r: y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, $s: \frac{x}{-4}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-2}$

b) $r: \left\{\begin{matrix} x=2+3t \\ y=3+6t \end{matrix}\right\}$, $s: 8x+2y-27=0$

5. Halla el valor de a para que las siguientes rectas sean paralelas:

$r: (x,y)=(-1,4)+t(a,8)$

$s: (x,y)=(5,-2)+t(2,-4)$

6. Halla a y b para que las rectas $r: \frac{x}{2}+\frac{y}{a}=1$ y $s: y=-bx+a$ se corten en el punto $(3,-\frac{5}{2})$.

7. Calcula una recta perpendicular a la recta $r: y=3x-5$ que pase por el punto $(1,-3)$.

8. Comprueba si la recta que pasa por los puntos (3, −3) y (1, 2) y la recta que pasa por los puntos (5, 2) y (7, −2) son perpendiculares.