Problemas – Tema 5

Enunciados de problemas sobre vectores

Hoja 1

1. Expresa el vector $\vec{u}=(5,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,5)$, $\vec{w}=(2,-1)$.

solución: $(5,3)=(1,5)+2(2,-1)$

2. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ comprueba que son linealmente independientes y que cualquier vector $\vec{w}=(x,y)$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

solución: $(x,y)=\frac{2x+y}{3}(1,1)+\frac{y-x}{3}(-1,2)$

3. ¿Forman $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}=(4,1,0)$ un sistema generador en $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$?

4. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(-1,1,1)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ expresa el vector $\vec{t}=(5,-3,-2)$ como combinación lineal de los otros tres.

solución: $(5,-3,-2)=0(1,-1,0)+(2,0,1)-3(-1,1,1)$

5. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,0)$, demuestra que forman una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=(10,4,-3)$ en dicha base.

solución: $(10,4,-3)=-16(1,1,1)+13(2,0,1)+20(0,1,0)$

6. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,-1,0)$, $\vec{w}=(m,0,0)$ sean linealmente independientes.

solución: $m\neq 0$

7. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-2,5)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$, $\vec{w}=(-1,1,m)$ sean linealmente independientes.

8. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,m,2)$, $\vec{w}=(3,1,m)$ sean linealmente independientes.

Hoja 2

1. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$, $\vec{w}=(0,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ comprueba que no son linealmente independientes.

2. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(2,-1)$, $\vec{v}=(-3,2)$, $\vec{w}=(1,0)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ son linealmente dependientes.

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,1,1)$, $\vec{w}=(1,-1,1)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, demuestra que forman un sistema generador.

4. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(4,-2,m)$ sean linealmente independientes.

solución: $m\neq 5$

5. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(1,0,-2)$, $\vec{w}=(m,-6,m-5)$ sean linealmente independientes.

6. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-2,0)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$, $\vec{w}=(m,-m,\frac{-m}{4})$ sean linealmente independientes.

7. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,m,3)$, $\vec{v}=(-1,1,m)$, $\vec{w}=(m,2,4)$ sean linealmente independientes.

Hoja 3

1. Expresa el vector $\vec{u}=(0,8)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(3,-5)$, $\vec{w}=(6,-2)$.

solución: $(0,8)=-2(3,-5)+(6,-2)$

2. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(1,2)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$, demuestra que forman un sistema generador. Expresa $\vec{w}=(4,-4)$ como combinación lineal del sistema generador.

solución: $(4,-4)=3(2,0)-2(1,2)$

3. Dados los puntos en el plano $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(2,7)$ represéntalos gráficamente y halla las coordenadas de los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

4. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$, $\vec{v}=(-2,5)$, $\vec{w}=(-4,3)$.

a) Normalizarlos.

b) Hallar el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$.

c) ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$?

5. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(2\cdot\sqrt{2},-2)$ y $\vec{v}=(\sqrt{2},-1)$.

6. Calcula el valor de m para que $\vec{u}=(m,5)$ tenga por módulo 13 .

7. Calcula valor de b para que los vectores $\vec{u}=(3,b)$ y $\vec{v}=(2,-1)$ formen un ángulo de 60º.

8. El triángulo ABC es rectángulo en A. Sus vértices son $A(3,5)$, $B(1,3)$, $C(m,10)$. Calcula el valor de m aplicando propiedades de vectores (no usar Pitágoras).

Hoja 4

1. Demuestra que los vectores $\vec{v}=(1,1,1)$, $\vec{w}=(1,1,0)$, $\vec{t}=(1,0,0)$ son una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. Expresa el vector $\vec{u}=(2,3,2)$ en función de esa base.

solución: $(2,3,2)=2(1,1,1)+(1,1,0)-(1,0,0)$

2. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(m,1,3)$, $\vec{v}=(0,m,-4)$, $\vec{w}=(1,2,-1)$ sean linealmente independientes.

solución: $m\neq 1, m\neq 4$

3. Dados los vectores $\vec{u}=(5,-1)$, $\vec{v}=(m,6)$, $\vec{w}=(2,n)$.

a) Calcular el valor de m para que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ sean perpendiculares.

b) Calcular el valor de n para que $\bar{u}$ y $\bar{w}$ sean perpendiculares.

c) Normalizar los vectores.

4. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(3,0)$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$.

5. Sean los vectores $\vec{u}=(3,-1)$ y $\vec{v}=(a,2)$. Calcula el valor de a para que el vector $\bar{u}$ sea perpendicular al vector suma $\vec{u}+\vec{v}$.

6. Sean los vectores $\vec{u}=(3,5)$ y $\vec{v}=(a,-1)$. Calcula el valor de a para que ambos tengan la misma dirección.

7. Sean los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(2,-3)$. Calcula el vector $\vec{w}=(x,y)$ para que este vector sea perpendicular a $\bar{u}$ y que $\vec{v}\cdot\vec{w}=1$.

Hoja 5

1. Sean los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$. Calcula:

a) Módulos y argumentos (ángulo con semieje positivo horizontal) de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y el ángulo que forman los dos vectores entre si.

c) Normalización del vector $\vec{u}$.

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$.

2. Sea el polígono irregular de cuatro lados, con vértices consecutivos en los puntos $A(2,3)$, $B(4,-5)$, $C(8,5)$ y $D(5,1)$.

a) Representar el polígono gráficamente y obtener su perímetro (trabajar con raíces, no usar decimales).

b) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$

c) Ángulo en el vértice A

d) $|\vec{BD}|$

3. Demostrar analíticamente que los siguientes vectores forman una base ortogonal en V^3 : $\vec{u}=(2,2,0)$, $\vec{v}=(-2,2,0)$, $\vec{w}=(0,0,2)$.

4. a) Dados los puntos $A(\frac{-1}{2},a)$, $B(1,0)$ y $C(\frac{-1}{2},-a)$, halla el valor de a para que el triángulo ABC sea equilátero.

b) Para $a=1$ obtener el ángulo del vértice B usando el producto escalar de vectores (elegir valor del primer cuadrante).

Hoja 6

1. Calcula a para que el conjunto de vectores $\vec{u}=(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$ y $\vec{v}=(2a,\frac{3a}{2})$ sea una base ortonormal.

2. a) Expresa $\vec{u}=(-3,5)$ como combinación lineal de $\vec{v}=(4,6)$ y $\vec{w}=(1,-4)$.

b) Demuestra analíticamente que los vectores $\vec{u}=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$, $\vec{v}=(2,3,-1)$ y $\vec{t}=(1,0,-1)$ no forman una sistema generador en V^3 .

3. a) Determinar los valores de $k\in\mathbb{R}$ que hacen linealmente independientes los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,k+1,1)$, $\vec{w}=(1,1,k+1)$.

b) Para $k=2$, demostrar que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

4. Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Pon un ejemplo que demuestre analíticamente cada afirmación y resolverlo.

a) Tres vectores en V^2 que forman un sistema generador no forman una base.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u}+\vec{v})$ y diferencia $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares.

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en V^2 , verifican $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

Hoja 7

1. Sean los puntos $A(x,1), B(3,2), C(1,4), D(3,5)$ y $E(1,3)$. Obtener x para que:

a) $\overrightarrow{AB}$ sea equipolente a $\overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{AC}$ sea paralelo a $\overrightarrow{BE}$.

c) $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{AE}$ sea dependiente con $\overrightarrow{BD}$.

e) $\overrightarrow{EA}$ sea independiente con $\overrightarrow{ED}$.

f) $\overrightarrow{CA}$ tenga módulo 5.

g) $\overrightarrow{DA}$ sea ortogonal con $\overrightarrow{DC}$.

h) $\overrightarrow{BA}$ forme un ángulo de 60º con $\overrightarrow{CE}$.

i) A, B y C estén alineados.

j) A, C y D no estén alineados.

2. Dado el triángulo de vértices $A(x,2), B(1,3) y C(2,-1)$.

a) Halla el valor de x para que el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice C.

b) Halla el valor de x para que el triángulo ABC sea isósceles y su lado desigual sea $\overline{AC}$.

3. Dado los vértices $A(-2,-1), B(6,3)$ y $C(2,7)$ de un triángulo, obtener los ángulos de sus tres vértices.

4. Expresa el vector $(5,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(2,\frac{1}{3})$.

5. Divide el segmento que une los puntos $A(1,-1)$ y $C(5,-3)$ en tres partes iguales.

6. Calcula la proyección del vector $\vec{u}=(5,-1)$ sobre el vector $\vec{v}=(-2,3)$.