

Problemas – Tema 5

Enunciados de problemas sobre vectores

Hoja 1

1. Expresa el vector $\vec{u}=(5,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,5)$, $\vec{w}=(2,-1)$.

solución: $(5,3)=(1,5)+2(2,-1)$

2. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ comprueba que son linealmente independientes y que cualquier vector $\vec{w}=(x,y)$ puede expresarse como combinación lineal de \vec{u} y de \vec{v} .

solución: $(x,y)=\frac{2x+y}{3}(1,1)+\frac{y-x}{3}(-1,2)$

3. ¿Forman $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}=(4,1,0)$ un sistema generador en $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

4. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(-1,1,1)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ expresa el vector $\vec{t}=(5,-3,-2)$ como combinación lineal de los otros tres.

solución: $(5,-3,-2)=0(1,-1,0)+(2,0,1)-3(-1,1,1)$

5. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,0)$, demuestra que forman una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=(10,4,-3)$ en dicha base.

solución: $(10,4,-3)=-16(1,1,1)+13(2,0,1)+20(0,1,0)$

6. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,-1,0)$, $\vec{w}=(m,0,0)$ sean linealmente independientes.

solución: $m \neq 0$

7. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-2,5)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$, $\vec{w}=(-1,1,m)$ sean linealmente independientes.

8. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,m,2)$, $\vec{w}=(3,1,m)$ sean linealmente independientes.

Hoja 2

1. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$, $\vec{w}=(0,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ comprueba que no son linealmente independientes.
2. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(2,-1)$, $\vec{v}=(-3,2)$, $\vec{w}=(1,0)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ son linealmente dependientes.
3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,1,1)$, $\vec{w}=(1,-1,1)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, demuestra que forman un sistema generador.
4. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(4,-2,m)$ sean linealmente independientes.
solución: $m \neq 5$
5. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(1,0,-2)$, $\vec{w}=(m,-6,m-5)$ sean linealmente independientes.
6. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-2,0)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$, $\vec{w}=(m,-m,\frac{-m}{4})$ sean linealmente independientes.
7. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,m,3)$, $\vec{v}=(-1,1,m)$, $\vec{w}=(m,2,4)$ sean linealmente independientes.

Hoja 3

1. Expresa el vector $\vec{u}=(0,8)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(3,-5)$, $\vec{w}=(6,-2)$.

solución: $(0,8)=-2(3,-5)+(6,-2)$

2. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(1,2)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, demuestra que forman un sistema generador. Expresa $\vec{w}=(4,-4)$ como combinación lineal del sistema generador.

solución: $(4,-4)=3(2,0)-2(1,2)$

3. Dados los puntos en el plano $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(2,7)$ represéntalos gráficamente y halla las coordenadas de los vectores \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{BC} .

4. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$, $\vec{v}=(-2,5)$, $\vec{w}=(-4,3)$.

a) Normalizarlos.

b) Hallar el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

c) ¿Qué ángulo forman los vectores \vec{u} y \vec{v} , y los vectores \vec{u} y \vec{w} ?

5. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(2\sqrt{2},-2)$ y $\vec{v}=(\sqrt{2},-1)$.

6. Calcula el valor de k para que $\vec{u} \hat{=} (k,5)$ tenga por módulo 13 .

7. Calcula valor de b para que los vectores $\vec{u} \hat{=} (3,b)$ y $\vec{v} \hat{=} (2,-1)$ formen un ángulo de 60° .

8. El triángulo ABC es rectángulo en A. Sus vértices son $A(3,5)$, $B(1,3)$, $C(m,10)$. Calcula el valor de m aplicando propiedades de vectores (no usar Pitágoras).

Hoja 4

1. Demuestra que los vectores $\vec{v}=(1,1,1)$, $\vec{w}=(1,1,0)$, $\vec{t}=(1,0,0)$ son una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Expresa el vector $\vec{u}=(2,3,2)$ en función de esa base.

solución: $(2,3,2)=2(1,1,1)+(1,1,0)-(1,0,0)$

2. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(m,1,3)$, $\vec{v}=(0,m,-4)$, $\vec{w}=(1,2,-1)$ sean linealmente independientes.

solución: $m \neq 1, m \neq \frac{-16}{3}$

3. Dados los vectores $\vec{u}=(5,-1)$, $\vec{v}=(m,6)$, $\vec{w}=(2,n)$.

- Calcular el valor de m para que \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares.
- Calcular el valor de n para que \vec{u} y \vec{w} sean perpendiculares.
- Normalizar los vectores.

4. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(3,0)$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$.

5. Sean los vectores $\vec{u}=(3,-1)$ y $\vec{v}=(a,2)$. Calcula el valor de a para que el vector \vec{u} sea perpendicular al vector suma $\vec{u}+\vec{v}$.

6. Sean los vectores $\vec{u}=(3,5)$ y $\vec{v}=(a,-1)$. Calcula el valor de a para que ambos tengan la misma dirección.

7. Sean los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(2,-3)$. Calcula el vector $\vec{w}=(x,y)$ para que este vector sea perpendicular a \vec{u} y que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$.

Hoja 5

1. Sean los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$. Calcula:

- Módulos y argumentos (ángulo con semieje positivo horizontal) de ambos vectores.
- El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y el ángulo que forman los dos vectores entre sí.
- Normalización del vector \vec{u} .
- Un vector ortogonal a \vec{v} .

2. Sea el polígono irregular de cuatro lados, con vértices consecutivos en los puntos $A(2,3)$, $B(4,-5)$, $C(8,5)$ y $D(5,1)$.

- Representar el polígono gráficamente y obtener su perímetro (trabajar con raíces, no usar decimales).
- $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- Ángulo en el vértice A
- $|\vec{BD}|$

3. Demostrar analíticamente que los siguientes vectores forman una base ortogonal en V^3 :
 $\vec{u}=(2,2,0)$, $\vec{v}=(-2,2,0)$, $\vec{w}=(0,0,2)$.

4. a) Dados los puntos $A(\frac{-1}{2}, a)$, $B(1,0)$ y $C(\frac{-1}{2}, -a)$, halla el valor de a para que el triángulo ABC sea equilátero.

b) Para $a=1$ obtener el ángulo del vértice B usando el producto escalar de vectores (elegir valor del primer cuadrante).

Hoja 6

1. Calcula a para que el conjunto de vectores $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ y $\vec{v} = \left(2a, \frac{3a}{2}\right)$ sea una base ortonormal.

2. a) Expresa $\vec{u} = (-3, 5)$ como combinación lineal de $\vec{v} = (4, 6)$ y $\vec{w} = (1, -4)$.

b) Demuestra analíticamente que los vectores $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $\vec{v} = (2, 3, -1)$ y $\vec{t} = (1, 0, -1)$ no forman un sistema generador en V^3 .

3. a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ que hacen linealmente independientes los siguientes vectores:
 $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, k+1, 1)$, $\vec{w} = (1, 1, k+1)$.

b) Para $k = 2$, demostrar que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

4. Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Pon un ejemplo que demuestre analíticamente cada afirmación y resolverlo.

a) Tres vectores en V^2 que forman un sistema generador no forman una base.

b) Si \vec{u} y \vec{v} son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u} + \vec{v})$ y diferencia $(\vec{u} - \vec{v})$ son perpendiculares.

c) Si \vec{u} y \vec{v} son vectores ortogonales en V^2 , verifican $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

Hoja 7

1. Sean los puntos $A(x,1)$, $B(3,2)$, $C(1,4)$, $D(3,5)$ y $E(1,3)$. Obtener x para que:

- \vec{AB} sea equipolente a \vec{CD} .
- \vec{AC} sea paralelo a \vec{BE} .
- \vec{AD} sea perpendicular a \vec{BC} .
- \vec{AE} sea dependiente con \vec{BD} .
- \vec{EA} sea independiente con \vec{ED} .
- \vec{CA} tenga módulo 5.
- \vec{DA} sea ortogonal con \vec{DC} .
- \vec{BA} forme un ángulo de 60° con \vec{CE} .
- A, B y C estén alineados.
- A, C y D no estén alineados.

2. Dado el triángulo de vértices $A(x,2)$, $B(1,3)$ y $C(2,-1)$.

- Halla el valor de x para que el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice C.
- Halla el valor de x para que el triángulo ABC sea isósceles y su lado desigual sea \overline{AC} .

3. Dado los vértices $A(-2,-1)$, $B(6,3)$ y $C(2,7)$ de un triángulo, obtener los ángulos de sus tres vértices.

4. Expresa el vector $(5,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(2,\frac{1}{3})$.

5. Divide el segmento que une los puntos $A(1,-1)$ y $C(5,-3)$ en tres partes iguales.

6. Calcula la proyección del vector $\vec{u}=(5,-1)$ sobre el vector $\vec{v}=(-2,3)$.