Problemas – Tema 3

Enunciados de problemas sobre complejos

Hoja 1

1. Dados los complejos:

$z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 2 - i$

$z_3 = 1 + 4i$

$z_4 = 5 – 2i$

Calcula $(z_1 + z_2)(z_3 – z_4)$

solución: -28 + 16i

2. Calcula $(2 + i)^4$

solución: -7 + 24i

3. Resuelve $x^2-10x+26=0$

solución: 5 + i, 5 – i

4. Dados los complejos:

$z_1 = m + 3i$

$z_2 = 5 – 2i$

Calcula m para que se cumpla:

a) $z_1 \cdot z_2$ sea un número real

b) $z_1 \cdot z_2$ sea imaginario puro

solución:

a) m = 15/2

b) m = -6/5

5. Opera:

$$\frac{2+3i}{1+i}$$

solución: $\frac{5}{2}+\frac{i}{2}$

Hoja 2

1. Simplifica:

a) $\frac{i^{17}+i^{23}}{i^{16}+i^{33}}$

b) $\frac{i^{27}-i^{31}}{i^{101}+i^{32}}$

c) $\frac{2i^{14}-3i^{18}}{4i^{73}+5i^{21}}$

solución: a) 0 b) 0 c) $\frac{-i}{9}$

2. Resuelve (obtener valor de la incógnita x):

a) (2 + 3i) + (1 – 5i) x = (4 + 2i) + (1 – i) x

b) (5 – i) x + (2 + i) = (1 – i) – (3 + 2i) x

solución: a) $x=\frac{1}{4}+\frac{i}{2}$ b) $x=\frac{-2}{13}-\frac{3i}{13}$

3. Calcular el valor de a para que el resultado sea un número imaginario puro

$\frac{2+ai}{3-i}$

solución: 6

4. Deduce que el inverso del complejo (a + bi) es igual a $\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$

5. Deduce el elemento neutro y el elemento simétrico de la suma de complejos.

solución: neutro = 0 + 0i, simétrico = -a – bi

6. Deduce el elemento neutro y el elemento simétrico de la multiplicación de complejos.

solución: neutro = 1 + 0i, simétrico = $\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$

7. Resuelve $x^4 + 16 = 0$

solución: $2_{45°+90°k}, k\in\mathbb{Z}$

Hoja 3

1. Representa en una tabla la forma cartesiana, binómica, trigonométrica y polar del número complejo $(\sqrt{3},1)$, y las de su opuesto, conjugado, inverso, opuesto del conjugado y conjugado del opuesto.

2. A partir de la fórmula de Moivre, deduce las razones trigonométricas del seno y el coseno del ángulo doble.

3. Un pentágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas, siendo uno de sus vértices el punto $A(1,\sqrt{3})$. Calcula las coordenadas de los restantes vértices.

solución: 2_{132^o} , 2_{204^o} , 2_{276^o} , 2_{348^o}

4. Opera:

a) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$

b) $(\sqrt{2}-i)^6$

solución:

a) 2_{132^o} , 1_{315^o}

b)

5. Sabiendo que z es un número complejo, resuelve la ecuación:

$$\frac{z}{1+i}+\frac{z}{i}=2i$$

solución: $\frac{-6}{5}+\frac{2}{5}i$

6. Resolver en el cuerpo de los números complejos $x^4 - 1 = 0$

solución: $1_{90^o k}, k\in\mathbb{Z}$

7. Hallar todos los números complejos z que cumplan que los complejos (1 + 0i), z y conjugado de z formen un triángulo equilátero.

solución:

Hoja 4

1. Resuelve:

a) $\sqrt[4]{\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$

b) $(2 + 2i)^4$

solución: a) b)

2. Escribe una ecuación de 2º grado, que tenga como soluciones los números complejos:

$z_1 = 4 + 3i$

$z_2 = 4 – 3i$

solución: $x^2 + 8x + 25 = 0$

3. Resuelve $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

solución: 1, i, -i

4. Calcula a y b sabiendo que el módulo de z_1 es 13, y que el producto $z_1 \cdot z_2$ es un número real.

$z_1 = 12 + ai$

$z_2 = b + 3i$

solución:

a = 5, b = -36/5

a = -5, b = 36/5

5. Sea A(4, 4) perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea $B(-8\sqrt{3},8)$?

solución: $(2\sqrt{2})_{105º+360º k}, k\in\mathbb{Z}$

6. Halla un complejo que teniendo por módulo 5, al ser multiplicado por el complejo (4 – 3i), de como resultado un número real.

solución: 4 + 3i, -4 – 3i

Hoja 5

1. Calcula:

$$\sqrt[3]{\frac{(1-i)^4}{(2_{15})^5}}$$

solución:

2. Calcula x para que el resultado del siguiente cociente tenga de módulo $\sqrt{5}$

$$\frac{1+3i}{1+xi}$$

solución: 1, -1

3. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es (2 – 8i). Además la parte real de uno de ellos es 3, y el producto de ambos es un número real.

solución: 3 – 6i, -1 – 2i

4. Obtén el valor de la incógnita z, perteneciente al cuerpo de los números complejos:

$$13z^5+5-12i=0$$

solución: $z=1_{\frac{112°37'11,5''+360°k}{5}}, k\in\mathbb{Z}$

5. Halla dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y que uno de ellos es el cuadrado del otro.

solución: $z_1=2_{60°}, z_2=4_{120°}$

6. Calcula las raíces cúbicas de z = 1 – i

solución: $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(\cos(\frac{7\pi}{12}+k2\pi)+i\,sen(\frac{7\pi}{12}+k2\pi)) \quad ,k\in\mathbb{Z}$

7. Calcula las soluciones de la ecuación $z^2 = 1 – i$

solución: $(2)^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{7\pi}{8}+k2\pi)+i\,sen(\frac{7\pi}{8}+k2\pi)) \quad ,k\in\mathbb{Z}$

8. Calcula la solución de $z^2 = 4$ en el cuerpo de los números complejos.

solución: $2e^{ik\pi} \quad ,k\in\mathbb{Z}$

Hoja 6

1. Demuestra que para el complejo $z=\cos x-i\cdot sen\,x$ se verifica $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$. Si $x=45º$, halla las raíces cúbicas y de orden quinto del complejo z .

2. Calcula el cociente $\frac{2(i^4-i^3)}{1-i}$ y sus raíces cuartas.

3. Calcula los siguientes cocientes:

a) $\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$

b) $\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}$

4. Halla un número complejo cuyo cubo es un número y la componente real del mismo es superior en una unidad a la componente imaginaria.

5. Los afijos de tres números complejos forman un triángulo de vértices $A(3,0),\ B(-1,4)\ y\ C(0,-5)$. Si se multiplica cada uno de los números complejos por el número i, se obtienen otros tres números complejos cuyos afijos son $A',\ B'\ y\ C'$ que formarán un nuevo triángulo. Calcularlas coordenadas de estos nuevos vértices.

6. El origen de coordenadas O y el punto $A(2,1)$ son vértices consecutivos de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que tienen su ordenada positiva.

7. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1+6\mathrm{i}$ y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los sumandos es igual a uno.

8. El producto de dos números complejos es $4\mathrm{i}$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro resulta $\frac{1}{4}$. Halla los módulos y los argumentos de los complejos dados.

9. Halla dos números complejos cuyo cociente sea imaginario puro y cuya suma sea 5, sabiendo que el módulo del dividendo es doble del módulo del divisor.

Hoja 7

1. Opera y simplifica $\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$.

2. Calcular el valor de a para que el cociente $\frac{2+ai}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

3. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

4. Opera y desarrolla la potencia $(\sqrt{2}-i)^6$ y expresa el resultado final en notación polar, trigonométrica y binómica.

5. Determinar a y b para que el cociente $\frac{a+2\mathrm{i}}{3+bi}$ sea igual a $(\sqrt{2})_{45^{\circ}}$.

6. Resuelve $x^4+16=0$. Escribe las soluciones en notación polar.

7. Sea el afijo $A(4,4)$ perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea el afijo complejo $B(-8\sqrt{3},8)$?

8. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1+6\mathrm{i}$ y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los sumandos es igual a uno.

9. Una de las soluciones de la raíz quinta de un número complejo es el afijo $A(1,\sqrt{3})$. Calcula las restantes soluciones de esa raíz quinta, en forma trigonométrica.

10. Calcula $\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}$.

11. Obtener la forma binómica y polar del número complejo $(\sqrt{3},1)$. Obtener también su conjugado y su inverso en forma polar.

12. Obtener z en la ecuación $\frac{z}{1+i}+\frac{z}{i}=2\mathrm{i}$, sabiendo que z es un número complejo.