

## Problemas – Tema 3

### Enunciados de problemas sobre complejos

#### ■ Hoja 1

1. Dados los complejos:

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 2 - i$$

$$z_3 = 1 + 4i$$

$$z_4 = 5 - 2i$$

Calcula  $(z_1 + z_2)(z_3 - z_4)$

solución:  $-28 + 16i$

2. Calcula  $(2 + i)^4$

solución:  $-7 + 24i$

3. Resuelve  $x^2 - 10x + 26 = 0$

solución:  $5 + i, 5 - i$

4. Dados los complejos:

$$z_1 = m + 3i$$

$$z_2 = 5 - 2i$$

Calcula  $m$  para que se cumpla:

a)  $z_1 \cdot z_2$  sea un número real

b)  $z_1 \cdot z_2$  sea imaginario puro

solución:

a)  $m = 15/2$

b)  $m = -6/5$

5. Opera:

$$\frac{2+3i}{1+i}$$

solución:  $\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$

## Hoja 2

1. Simplifica:

a)  $\frac{i^{17} + i^{23}}{i^{16} + i^{33}}$

b)  $\frac{i^{27} - i^{31}}{i^{101} + i^{32}}$

c)  $\frac{2i^{14} - 3i^{18}}{4i^{73} + 5i^{21}}$

solución: a) 0      b) 0      c)  $\frac{-i}{9}$

2. Resuelve (obtener valor de la incógnita x):

a)  $(2 + 3i) + (1 - 5i)x = (4 + 2i) + (1 - i)x$

b)  $(5 - i)x + (2 + i) = (1 - i) - (3 + 2i)x$

solución: a)  $x = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}$       b)  $x = \frac{-2}{13} - \frac{3i}{13}$

3. Calcular el valor de a para que el resultado sea un número imaginario puro

$$\frac{2+ai}{3-i}$$

solución: 6

4. Deduce que el inverso del complejo  $(a + bi)$  es igual a  $\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$

5. Deduce el elemento neutro y el elemento simétrico de la suma de complejos.

solución: neutro =  $0 + 0i$ , simétrico =  $-a - bi$

6. Deduce el elemento neutro y el elemento simétrico de la multiplicación de complejos.

solución: neutro =  $1 + 0i$ , simétrico =  $\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$

7. Resuelve  $x^4 + 16 = 0$

solución:  $2_{45^\circ+90^\circ k}, k \in \mathbb{Z}$

## Hoja 3

1. Representa en una tabla la forma cartesiana, binómica, trigonométrica y polar del número complejo  $(\sqrt{3}, 1)$ , y las de su opuesto, conjugado, inverso, opuesto del conjugado y conjugado del opuesto.

2. A partir de la fórmula de Moivre, deduce las razones trigonométricas del seno y el coseno del ángulo doble.

3. Un pentágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas, siendo uno de sus vértices el punto  $A(1, \sqrt{3})$ . Calcula las coordenadas de los restantes vértices.

solución:  $z_{132^\circ}$ ,  $z_{204^\circ}$ ,  $z_{276^\circ}$ ,  $z_{348^\circ}$

4. Opera:

a)  $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$

b)  $(\sqrt{2}-i)^6$

solución:

a)  $z_{135^\circ}$ ,  $z_{315^\circ}$

b)

5. Sabiendo que  $z$  es un número complejo, resuelve la ecuación:

$$\frac{z}{1+i} + \frac{z}{i} = 2i$$

solución:  $-\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$

6. Resolver en el cuerpo de los números complejos  $x^4 - 1 = 0$

solución:  $z_{90^\circ k}, k \in \mathbb{Z}$

7. Hallar todos los números complejos  $z$  que cumplan que los complejos  $(1 + 0i)$ ,  $z$  y conjugado de  $z$  formen un triángulo equilátero.

solución:

## Hoja 4

1. Resuelve:

a) 
$$\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$$

b)  $(2 + 2i)^4$

solución: a)

b)

2. Escribe una ecuación de 2º grado, que tenga como soluciones los números complejos:

$z_1 = 4 + 3i$

$z_2 = 4 - 3i$

solución:  $x^2 - 8x + 25 = 0$

3. Resuelve  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

solución: 1, i, -i

4. Calcula a y b sabiendo que el módulo de  $z_1$  es 13, y que el producto  $z_1 \cdot z_2$  es un número real.

$z_1 = 12 + ai$

$z_2 = b + 3i$

solución:

$a = 5, b = -36/5$

$a = -5, b = 36/5$

5. Sea  $A(4, 4)$  perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea  $B(-8\sqrt{3}, 8)$  ?

solución:  $(2\sqrt{2})_{105^\circ+360^\circ k}, k \in \mathbb{Z}$

6. Halla un complejo que teniendo por módulo 5, al ser multiplicado por el complejo  $(4 - 3i)$ , de como resultado un número real.

solución:  $4 + 3i, -4 - 3i$

## Hoja 5

1. Calcula:

$$\sqrt[3]{\frac{(1-i)^4}{(2-15i)^5}}$$

solución:

2. Calcula  $x$  para que el resultado del siguiente cociente tenga de módulo  $\sqrt{5}$

$$\frac{1+3i}{1+xi}$$

solución: 1, -1

3. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es  $(2 - 8i)$ . Además la parte real de uno de ellos es 3, y el producto de ambos es un número real.

solución:  $3 - 6i$ ,  $-1 - 2i$

4. Obtén el valor de la incógnita  $z$ , perteneciente al cuerpo de los números complejos:

$$13z^5 + 5 - 12i = 0$$

solución:  $z = 1_{\frac{112^\circ 37' 11,5'' + 360^\circ k}{5}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

5. Halla dos números complejos sabiendo que su producto es  $-8$  y que uno de ellos es el cuadrado del otro.

solución:  $z_1 = 2_{60^\circ}$ ,  $z_2 = 4_{120^\circ}$

6. Calcula las raíces cúbicas de  $z = 1 - i$

solución:  $(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{3}} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{12} + k2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12} + k2\pi\right) \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

7. Calcula las soluciones de la ecuación  $z^2 = 1 - i$

solución:  $(2)^{\frac{1}{4}} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{8} + k2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{8} + k2\pi\right) \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

8. Calcula la solución de  $z^2 = 4$  en el cuerpo de los números complejos.

solución:  $2e^{ik\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

## Hoja 6

1. Demuestra que para el complejo  $z = \cos x - i \cdot \operatorname{sen} x$  se verifica  $\frac{1}{z} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$ . Si  $x = 45^\circ$ , halla las raíces cúbicas y de orden quinto del complejo  $z$ .

2. Calcula el cociente  $\frac{2(i^4 - i^3)}{1 - i}$  y sus raíces cuartas.

3. Calcula los siguientes cocientes:

a)  $\frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$

b)  $\frac{(3 - i)^2}{i(1 + i)}$

4. Halla un número complejo cuyo cubo es un número y la componente real del mismo es superior en una unidad a la componente imaginaria.

5. Los afijos de tres números complejos forman un triángulo de vértices  $A(3,0)$ ,  $B(-1,4)$  y  $C(0,-5)$ . Si se multiplica cada uno de los números complejos por el número  $i$ , se obtienen otros tres números complejos cuyos afijos son  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  que formarán un nuevo triángulo. Calcular las coordenadas de estos nuevos vértices.

6. El origen de coordenadas  $O$  y el punto  $A(2,1)$  son vértices consecutivos de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que tienen su ordenada positiva.

7. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es  $1 + 6i$  y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los sumandos es igual a uno.

8. El producto de dos números complejos es  $4i$ , y el cubo de uno de ellos dividido por el otro resulta  $\frac{1}{4}$ . Halla los módulos y los argumentos de los complejos dados.

9. Halla dos números complejos cuyo cociente sea imaginario puro y cuya suma sea 5, sabiendo que el módulo del dividendo es doble del módulo del divisor.

## Hoja 7

1. Opera y simplifica  $\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$ .

2. Calcular el valor de  $a$  para que el cociente  $\frac{2+ai}{3-i}$  sea un número imaginario puro.

3. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

4. Opera y desarrolla la potencia  $(\sqrt{2}-i)^6$  y expresa el resultado final en notación polar, trigonométrica y binómica.

5. Determinar  $a$  y  $b$  para que el cociente  $\frac{a+2i}{3+bi}$  sea igual a  $(\sqrt{2})_{45^\circ}$ .

6. Resuelve  $x^4+16=0$ . Escribe las soluciones en notación polar.

7. Sea el afijo  $A(4,4)$  perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea el afijo complejo  $B(-8\sqrt{3},8)$ ?

8. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es  $1+6i$  y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los sumandos es igual a uno.

9. Una de las soluciones de la raíz quinta de un número complejo es el afijo  $A(1,\sqrt{3})$ . Calcula las restantes soluciones de esa raíz quinta, en forma trigonométrica.

10. Calcula  $\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}$ .

11. Obtener la forma binómica y polar del número complejo  $(\sqrt{3},1)$ . Obtener también su conjugado y su inverso en forma polar.

12. Obtener  $z$  en la ecuación  $\frac{z}{1+i}+\frac{z}{i}=2i$ , sabiendo que  $z$  es un número complejo.

## ■ Hoja 8

1. Opera  $\sqrt{3-2i}$

2. Opera  $\sqrt{1-i}$

3. Opera  $\sqrt{2+\sqrt{3}i}$