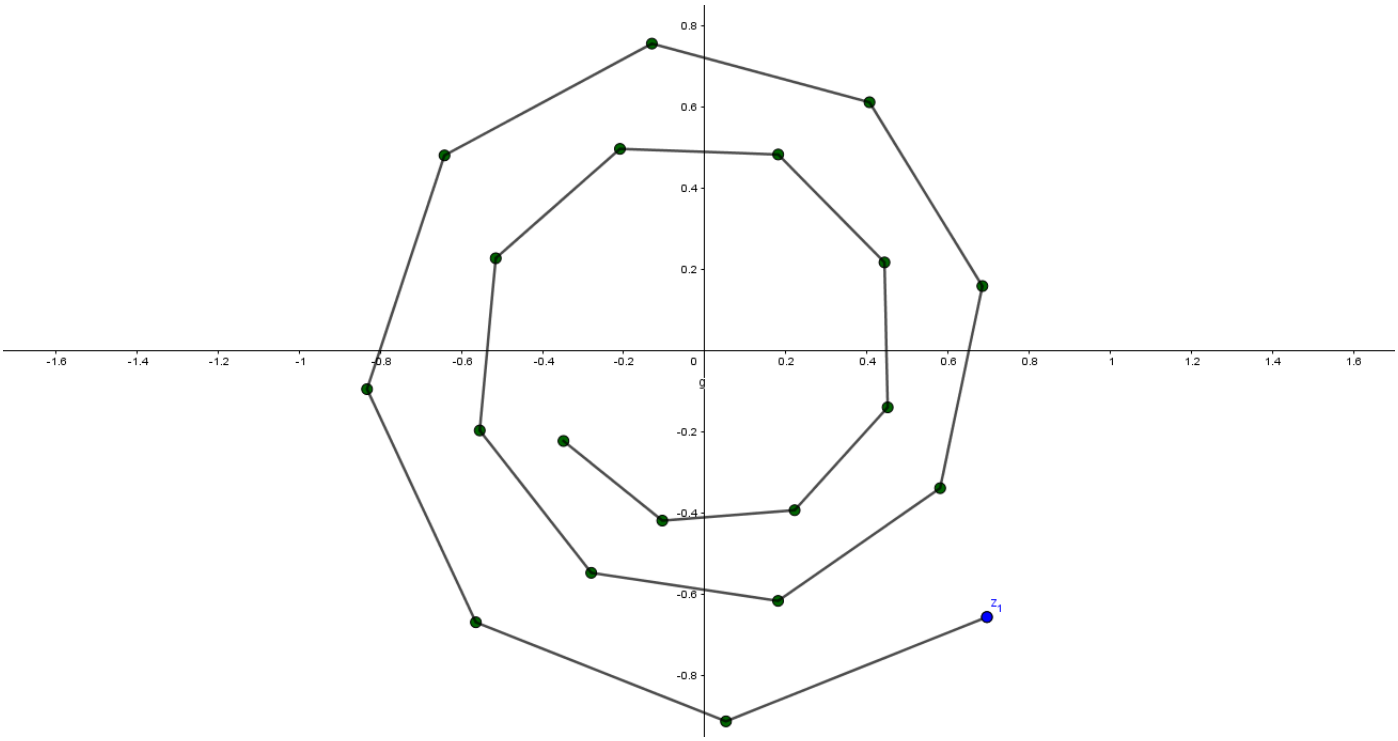
MATEMÁTICAS I

Índice, Resumen de Teoría y Ejercicios Esenciales

MATEMÁTICAS I y II

1º y 2º BACHILLERATO CIENCIAS

Maristas Granada



COLEGIO MARISTA "LA INMACULADA" (GRANADA)

Profesor: Daniel Partal García – www.danipartal.net

BREVE DESCRIPCIÓN

El presente documento muestra el índice de contenidos de la asignatura de Matemáticas I de 1ºBachillerato, el resumen de teoría de cada uno de los nueve temas en que se organiza la asignatura y un listado de ejercicios esenciales (con la referencia a su solución en la web de la asignatura).

El desarrollo completo de los materiales de la asignatura está disponible en la web:

www.danipartal.net

EVALUACIÓN	TEMA (EXAMEN ACUMULATIVO AL FINALIZAR CADA TEMA)
1ª Evaluación de septiembre a noviembre	Tema 1: Repaso 4ºESO
	Tema 2: Trigonometría
	Tema 3: Números Complejos
2ª Evaluación de diciembre a febrero	Tema 4: Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones. Programación lineal
	Tema 5: Vectores
	Tema 6: Geometría en dos dimensiones: rectas y cónicas
3ª Evaluación de marzo a junio	Tema 7: Estadística
	Tema 8: Funciones y Límite
	Tema 9: Derivadas
Examen global final de junio	Examen de hora y media de duración con el que subir la nota obtenida al finalizar la tercera evaluación

Las **actividades de calificación trimestrales** son:

- **Tres pruebas escritas sin ayuda de apuntes personales**.
- La **media de las resoluciones y explicaciones de problemas en la pizarra, de manera individual,** que serán previamente preparadas por el alumno con ayuda de sus apuntes personales.
- La **media de las respuestas orales a las preguntas de clase, del trabajo diario observado por el profesor, de las tareas de grupo realizadas en clase y del trabajo con software matemático en el aula**.

Los **contenidos son acumulativos** conforme avanza el curso. Todas las actividades de calificación buscan evaluar el mayor número de criterios de evaluación posible, con actividades competenciales razonadas y argumentadas al estilo de las que el profesor resuelve en clase. Estas actividades dan una evaluación (de Insuficiente a Sobresaliente) de los 18 criterios de evaluación que la ley educativa marca para las asignaturas de Matemáticas I y II.

La experiencia docente afirma que calcular la media de la asignatura como una media de esos 18 criterios de evaluación es una tarea compleja de comprender por el alumnado y sus familias. Por lo tanto, siendo prácticos en la vida y buscando la mejor preparación posible al examen de acceso a la Universidad, fijaremos el siguiente patrón: **90% de la calificación trimestral corresponde a la media de las pruebas escritas** y el **10% de la calificación corresponde a la media del resto de actividades**. Estos porcentajes son una aproximación al porcentaje de criterios evaluados en cada tipo de actividad.

La nota del tercer trimestre se corresponde con la nota final de la asignatura, ofreciéndose un examen escrito global final para subir la nota a finales de junio.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. **Tema 1. Repaso de 4ºESO**
   - 1.1. Típicos errores matemáticos: factorizar, simplificar, racionalizar, conjugado, binomio de Newton.
   - 1.2. Propiedades de los números reales. Intervalos: unión e intersección.
   - 1.3. Teorema del resto en la división de polinomios. Ruffini.
   - 1.4. Puntos característicos de una parábola (representación gráfica de un polinomio de segundo grado).
   - 1.5. Resolver ecuaciones con raíces, bicuadráticas y con cociente de polinomios.
   - 1.6. Sistemas de ecuaciones 2x2 lineales y no lineales.
   - 1.7. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de una incógnita.
   - 1.8. Sistemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas. Representación gráfica.
   - 1.9. Valor absoluto en ecuaciones y en inecuaciones.
   - 1.10. Valor absoluto en funciones elementales.
   - 1.11. Concepto de función. Casos particulares de la exponencial y de la función logaritmo.
   - 1.12. Propiedades en ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
   - 1.13. Traslación vertical y horizontal de funciones elementales.
   - 1.14. Problemas de enunciado para resolver mediante ecuaciones.
2. **Tema 2. Trigonometría**
   - 2.1. Circunferencia goniométrica. Grados y radianes (modo DEG y RAD de la calculadora). Definición de seno, coseno y tangente en triángulo rectángulo contenido dentro de la circunferencia goniométrica.
   - 2.2. Descomponer un vector en componente vertical y horizontal. Aplicación en el lanzamiento parabólico.
   - 2.3. Gráficas de la función seno, coseno y tangente: dominio, imagen, máximos, mínimos, corte con los ejes, periodicidad.
   - 2.4. Deducir razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º a partir de triángulo equilátero y de cuadrado de lado unidad.
   - 2.5. Signos de seno, coseno y tangente en cada cuadrante. Sumar y restar vueltas completas de 360º.
   - 2.6. Definición de cosecante, secante y cotangente. No confundir la inversa de un número real con el concepto de inversa de una función.
   - 2.7. Relación fundamental de trigonometría.
   - 2.8. Ángulos con el mismo seno en diferentes cuadrante. Ángulos con el mismo coseno en diferentes cuadrantes. Ángulos con la misma tangente en diferentes cuadrantes.
   - 2.9. Razones trigonométricas en ángulos que suman 90º, que difieren 90º, que suman 180º, que difieren 180º y que suman 360º.
   - 2.10. Fórmulas para obtener el seno, coseno y tangente de la suma y de la diferencia de ángulos. Ángulo doble y ángulo mitad.
   - 2.11. Convertir suma y diferencia de senos y cosenos en producto de razones trigonométricas.
   - 2.12. Convertir productos de senos y cosenos en sumas y diferencias de razones trigonométricas.
   - 2.13. Teorema del seno.
   - 2.14. Teorema del coseno.
   - 2.15. Áreas de triángulos.
   - 2.16. Problemas sobre triángulos.
   - 2.17. Demostrar igualdades trigonométricas.
   - 2.18. Resolver ecuaciones y sistemas con razones trigonométricas.
   - 2.19. Problemas de enunciado para resolver planteando relaciones trigonométricas.
3. **Tema 3. Números complejos**
   - 3.1. ¿Por qué no son suficientes los números reales en Matemáticas?
   - 3.2. Definición de unidad imaginaria: parte real y parte imaginaria de un complejo en notación binómica.
   - 3.3. El cuerpo de los números complejos: suma, resta y producto en notación binómica.
   - 3.4. Conjugado de un número complejo: división en notación binómica.
   - 3.5. Raíz cuadrada en notación binómica.
   - 3.6. Potencia de la unidad imaginaria.
   - 3.7. Potencia en notación binómica: binomio de Newton y número combinatorio.
   - 3.8. Notación afija: el plano complejo. Posición de los números reales puros e imaginarios puros.
   - 3.9. Módulo y fase de un número complejo: notación polar. Números reales puros, imaginarios puros, conjugado, opuesto e inverso en notación polar.
   - 3.10. Pasar de polar a binómica mediante la notación trigonométrica.
   - 3.11. Producto y cociente en notación polar. Giro en el plano complejo en sentido horario y antihorario.
   - 3.12. Potencia en forma polar.
   - 3.13. Raíces en forma polar. Polígonos regulares centrados en el origen de coordenadas.
   - 3.14. Distancias entre puntos en el plano complejo.
   - 3.15. Potencia de complejos en forma trigonométrica: fórmula de Moivre.
   - 3.16. Ecuación de Euler para un número complejo.
   - 3.17. Raíces de una ecuación polinómica: Teorema fundamental del Álgebra.
4. **Tema 4. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales. Programación lineal**
   - 4.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
   - 4.2. Sistemas 2x2. Rectas en el plano bidimensional.
   - 4.3. Sistemas 3x2. Tres rectas en el plano bidimensional.
   - 4.4. Sistemas 2x3. Rectas en el espacio tridimensional.
   - 4.5. Operaciones permitidas en método de Gauss y notación matricial de sistemas.

4.6. Sistemas 3x3. Planos en el espacio tridimensional.
4.7. Sistemas con parámetro inicial. Parte 1 de 4.
4.8. Sistemas con parámetro inicial. Parte 2 de 4.
4.9. Sistemas con parámetro inicial. Parte 3 de 4.
4.10. Sistemas con parámetro inicial. Inhabilitación de Gauss. Parte 4 de 4.
4.11. Problemas con enunciados para plantear sistema de ecuaciones.
4.12. Repaso de sistemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas.
4.13. Teorema fundamental de la programación lineal.
4.14. Ejercicios tipo sobre programación lineal. Parte 1 de 2.
4.15. Ejercicios tipo sobre programación lineal. Parte 2 de 2.

5. Tema 5. Vectores

5.1. Dimensión de un espacio vectorial. Concepto de vector en 2 y 3 dimensiones: dirección, sentido y módulo. Vector unitario.
5.2. Ángulo formado por un vector con el eje horizontal en 2 dimensiones. Concepto de pendiente.
5.3. Vectores proporcionales: paralelos y antiparalelo. Relación entre las pendientes de vectores proporcionales.
5.4. Vectores perpendiculares. Caso especial en 2 dimensiones: relación entre las pendientes.
5.5. Proyección de un vector sobre otro. Definición del producto escalar.
5.6. Expresar un vector en función de la base canónica.
5.7. Fórmula analítica del producto escalar: ángulo entre vectores y producto escalar. Condición para vectores perpendiculares.
5.8. Suma y diferencia de vectores por método analítico y por método gráfico.
5.9. Combinación lineal o conjunto de vectores linealmente dependientes.
5.10. Sistema libre o vectores linealmente independientes.
5.11. Rango de un conjunto de vectores: método de Gauss.
5.12. Sistema generador.
5.13. Base, base ortogonal, base ortonormal y base canónica.
5.14. Rango de un conjunto de vectores en función del valor de un parámetro inicial: discusión de casos.
5.15. Introducción al producto vectorial en tres dimensiones: módulo del producto vectorial y fórmulas para obtener el área de un paralelogramo y de un triángulo.

6. Tema 6. Geometría en dos dimensiones: rectas y cónicas

6.1. Ecuaciones de la recta. Puntos alineados.
6.2. Rectas paralelas y perpendiculares. Pendiente de una recta.
6.3. Distancia entre puntos. Distancia del origen a una recta. Distancia de un punto a una recta: concepto de punto arbitrario de la recta. Distancia entre rectas paralelas.
6.4. Dividir un segmento en partes iguales. Mediatriz de un segmento. La mediatriz como lugar geométrico.
6.5. Ángulo entre dos rectas. Bisectriz. La bisectriz como lugar geométrico.
6.6. Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro. Rectas notables en el triángulo: mediatriz, bisectriz, altura y mediana. Área de un triángulo.
6.7. Simetría respecto de un punto y respecto de una recta.
6.8. Ecuación de la circunferencia. La circunferencia como lugar geométrico.
6.9. Circunferencias concéntricas. Puntos de corte entre circunferencias.
6.10. Concepto de potencia. Recta tangente a una circunferencia: haz de rectas.
6.11. Posición relativa entre recta y circunferencia.
6.12. Circunferencia circunscrita e inscrita a un triángulo.
6.13. Eje radical de circunferencias.
6.14. Ecuación de la elipse. Excentricidad. La elipse como lugar geométrico.
6.15. Recta tangente a una elipse.
6.16. Puntos de corte entre circunferencia y elipse.

7. Tema 7. Inferencia estadística: muestreo, distribuciones de probabilidad e inferencia

7.1. Repaso de conceptos de estadística unidimensional.
7.2. Variable aleatoria discreta: distribución binominal o de Bernoulli.
7.3. Variable aleatoria continua: distribución normal o gaussiana.
7.4. Ejercicios tipo sobre distribución binomial y normal.
7.5. Inferencia estadística.

8. Tema 8. Funciones y límites

8.1. Concepto de función: dominio e imagen en polinomios. Especial atención a la gráfica de rectas y parábolas y polinomios de grado tres.
8.2. Dominio en operaciones elementales con funciones: suma, resta, producto y cociente de funciones. Dominio en raíz, logaritmo y exponencial de una función.
8.3. ¿Qué es una función definida a trozos? Ejemplos con valores absolutos.
8.4. Composición de funciones. Dominio de una composición.
8.5. Obtener inversa de una función. Interpretación geométrica.
8.6. Concepto de continuidad. Interpretación gráfica de discontinuidades.
8.7. Concepto de límite de una función en un punto.
8.8. Límites laterales.
8.9. Propiedades de límites e indeterminación k/0.
8.10. Indeterminación 0/0 en cociente de polinomios y raíces de polinomios.
8.11. Indeterminación infinito/infinito en cociente de polinomios y raíces de polinomios.
8.12. Indeterminación infinito menos infinito en cociente de polinomios y raíces de polinomios.

8.13. Límites cuando x tiende a más y a menos infinito.
8.14. Continuidad en un punto frontera y tipos de discontinuidad.
8.15. Continuidad en funciones definidas a trozos.
8.16. Definición de asíntotas de funciones.
8.17. Asíntotas en cociente de polinomios.
8.18. Estudio cualitativo de gráficas de funciones. Traslación vertical y horizontal. Gráficas para memorizar.

9. Tema 9. Derivadas

9.1. Velocidad media y tasa de variación media.
9.2. Definición formal de derivada.
9.3. Tabla de derivación de funciones elementales.
9.4. Relación entre derivada y crecimiento de la función.
9.5. Interpretación geométrica de la derivada.
9.6. Punto crítico y condición necesaria de extremo relativo.
9.7. Condiciones suficientes de extremo relativo.
9.8. Condición necesaria de punto de inflexión.
9.9. Condiciones suficientes de punto de inflexión.
9.10. Diferencias entre extremos absolutos y relativos.
9.11. Relación entre la gráfica de la derivada y la gráfica de f(x).
9.12. Condiciones de contorno en la gráfica de funciones.
9.13. Regla de L'Hôpital en la resolución de límites.
9.14. Nuevas indeterminaciones en el límite de funciones.
9.15. Derivabilidad en funciones definidas a trozos.
9.16. Problemas de optimización.
9.17. Estudio y representación de funciones.
9.18. Introducción a las integrales inmediatas.

"Knowledge isn't free. You have to pay attention."
— Richard P. Feynman

RESUMEN TEORÍA TEMA 1: REPASO DE 4ºESO

Típicos errores matemáticos a evitar:

- Ojo al despejar en ecuaciones de primer grado:
  - $3x = 0 \rightarrow x = 0 - 3 \rightarrow x = -3 \rightarrow$ NO
  - $3x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{3} \rightarrow x = 0 \rightarrow$ SÍ
- No olvidar las multiplicaciones al sustituir una variable por un valor concreto, dentro de una función:
  - $f(x) = 2x + 1 \rightarrow f(-1) = 2 - 1 + 1 \rightarrow f(-1) = 2 \rightarrow$ NO
  - $f(x) = 2x + 1 \rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 \rightarrow f(-1) = -1 \rightarrow$ SÍ
- El cuadrado afecta al signo de un número negativo:
  - $f(x) = x^2 + 4 \rightarrow f(-2) = -2^2 + 4 \rightarrow f(-2) = -4 + 4 \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow$ NO
  - $f(x) = x^2 + 4 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 4 \rightarrow f(-2) = 4 + 4 \rightarrow f(-2) = 8 \rightarrow$ SÍ
- En una inecuación con fracciones, la variable no puede pasar multiplicando o dividiendo al otro miembro, porque no sabemos si representa un valor positivo o negativo.
  - $\frac{x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x+5} \rightarrow \frac{x(x+5)}{(x-1)(2x+1)} \leq 1 \rightarrow$ NO
  - $\frac{x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x+5} \rightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2x+1}{x+5} \leq 0 \rightarrow \frac{x(x+5)-(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+5)} \leq 0 \rightarrow$ SÍ
- Cuidado al simplificar en ecuaciones logarítmicas (más adelante repasaremos los logaritmos):
  - $\ln(x+1) - \ln(x-3) = \ln(x) \rightarrow x + 1 - (x - 3) = x \rightarrow 4 = x \rightarrow$ NO
  - $\ln(x+1) - \ln(x-3) = \ln(x) \rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \ln(x) \rightarrow \frac{x+1}{x-3} = x \rightarrow$ SÍ
- **Al resolver ecuaciones con raíces cuadradas o con logaritmos**, hay que **comprobar si la solución final satisface la ecuación de partida**. Recuerda que no existe la raíz cuadrada de un número real negativo. Y no existe el logaritmo de cero ni el logaritmo de un número negativo.
  - $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x} = 0 \rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2x} \rightarrow elevamos\ al\ cuadrado \rightarrow x - 1 = 2x \rightarrow x = -1 \rightarrow$ NO es solución, porque el valor $x = -1$ provoca que uno de los discriminantes de partida sea negativo.
- Al aplicar raíz cuadrada para resolver una ecuación de segundo grado incompleta, no olvidar aplicar los dos signos $\pm$ a la solución final.
  - $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x = 2 \rightarrow$ NO
  - $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow$ SÍ
- Ojito al sacar factor común en una expresión polinómica:
  - $3x^3 + 2x^2 + x \rightarrow x\left(\frac{3x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x}\right) \rightarrow x(3x^2 + 2x + 1) \rightarrow$ SÍ
- En un cociente de polinomios, solo podemos simplificar si encontramos un factor que multiplique a todo el numerador y a todo el denominador:
  - $\frac{1+x^2+x^4}{x^3} \rightarrow \frac{1+x^2(1+x^2)}{x^2 \cdot x} \rightarrow \frac{1+x^2(1+x^2)}{x^2 \cdot x} \rightarrow \frac{1+(1+x^2)}{x} \rightarrow \frac{2+x^2}{x} \rightarrow$ NO
  - $\frac{4x^2+2x}{8x} \rightarrow \frac{2x(2x+1)}{2x(4)} \rightarrow \frac{2x+1}{4} \rightarrow$ SÍ
- La raíz de una suma (o de una resta) no se rompe en la suma (o en la resta) de dos raíces. Esto solo ocurre en la raíz de un producto y en la raíz de un cociente:
  - $\sqrt{x-3} \rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{3} \rightarrow$ NO
  - $\sqrt{x^2-36} \rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{36} \rightarrow \mathrm{x} - 6 \rightarrow$ NO
  - $\sqrt{x^2+4} \rightarrow \sqrt{x^2+2^2} \rightarrow x + 2 \rightarrow$ NO
  - $\sqrt{x \cdot y} \rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \rightarrow$ SÍ (siempre que x e y sean no negativos)
  - $\sqrt{\frac{x}{y}} \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \rightarrow$ SÍ (siempre que x e y sean no negativos)
- **En una ecuación con cociente de polinomios, no olvides comprobar que los valores candidatos a solución no anulen ninguno de los denominadores**:
  - $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot x - 1 \cdot x^2}{x^2 \cdot x} = 0 \rightarrow \frac{2x - x^2}{x^3} = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \cdot x^3 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0$

    Candidatos a solución: $x = 0, x = 2 \rightarrow$ Pero $x = 0$ NO es solución por anular los dos denominadores de la ecuación de partida.

- Al operar con fracciones es recomendable aplicar m.c.m. en los denominadores para obtener las expresiones más sencillas posible:
  - $\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=0 \rightarrow$ m.c.m: $x^2 \rightarrow \frac{2\cdot 1-1\cdot x}{x^2}=0 \rightarrow \frac{2-x}{x^2}=0 \rightarrow 2-x=0\cdot x^2 \rightarrow 2-x=0 \rightarrow$ solución única: $x=2$
- Ojo con las potencias de binomios y de trinomios:
  - $(x+y)^2=x^2+y^2 \rightarrow$ NO
  - $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \rightarrow$ SÍ (el cuadrado de la suma es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo)
  - $(x-y)^2=x^2-y^2 \rightarrow$ NO
  - $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy \rightarrow$ SÍ (el cuadrado de la diferencia es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble producto del primero por el segundo)
  - $(x+y)(x-y)=x^2-y^2 \rightarrow$ SÍ (suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados)
  - $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \rightarrow$ NO → ¿Cómo se hace? Operando $(a+b+c)(a+b+c)$. Es decir:
    - $(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$

      Agrupando términos: $(a+b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
- **Una igualdad no es lo mismo que una ecuación**. Por ejemplo:
  - $A=B$ es una igualdad donde nos dice que el valor A siempre es igual al valor B. En una igualdad nunca se resuelve, porque no hay ninguna incógnita.
  - $x^3-2x=x^2+4$ es una ecuación, donde la igualdad solo se cumple para determinados valores de la incógnita x. **Resolver una ecuación significa obtener el valor o los valores de x que satisfacen la igualdad de partida**. Puede ocurrir que una ecuación no tenga solución.

Los números naturales $\mathcal{N}$ están incluidos dentro de los números enteros $\mathcal{Z}$.

Los números enteros $\mathcal{Z}$ están incluidos dentro de los números fraccionarios $\mathcal{Q}$.

Los números irracionales $\mathcal{I}$ son aquellos que no pueden expresarse como una fracción de números enteros. Por lo tanto, los números fraccionarios y los números irracionales forman dos conjuntos sin elementos en común.

Agrupando tanto a los números fraccionarios como a los números irracionales tenemos el cuerpo de los números reales $\mathcal{R}$.

Los números reales forman una **estructura matemática llamada cuerpo**. En pocas palabras, el cuerpo de los números reales se define por los infinitos número reales (de $-\infty$ a $+\infty$) que cumplen las propiedades de suma y multiplicación que hemos estudiado desde Primaria (con sus propiedades conmutativas, asociativas, etc.).

En la recta real podemos representar:

- $[a,b]$ intervalo cerrado
- (a,b) intervalo abierto
- $[a,b)$ intervalo semicerrado (o semiabierto)
- $(a,b]$ intervalo semicerrado (o semiabierto)
- Si el intervalo llega por uno de los extremos a infinito, ese lado siempre se representa abierto: $(-\infty,b]$.
- Un punto cerrado se representa por un círculo negro.
- Un punto abierto se representa por un círculo blanco.

La **unión** $\cup$ de dos conjuntos de números está formado por todos los elementos de ambos conjuntos. La unión es una operación conmutativa.

La **intersección** $\cap$ de dos conjuntos está formado solo por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez. La intersección también es una operación conmutativa.

Si no hay elementos en común entre dos conjuntos, la intersección forma el **conjunto vacío** $\emptyset$. No confundir el conjunto vacío con el número cero (son dos cosas totalmente distintas).

Dado un número entero (por ejemplo, el número 4), sabemos cuál es el entero que le sigue (en este caso, el número 5). Los enteros forman un conjunto infinito numerable.

Pero si hablamos de números reales, no sabemos cuál es el número real que sigue a 4. Los reales forman un conjunto infinito no numerable.

Cuando dividimos dos números reales, aprendimos en Primaria que:

$$Dividendo = Divisor \times Cociente + Resto$$

Si aplicamos esta relación al operar con polinomios llegamos al **Teorema del Resto**. En el caso particular de un polinomio $P(x)$ dividido entre un binomio $(x-a)$:

$$\frac{P(x)}{(x-a)} \rightarrow P(x)=(x-a)\times C(x)+Resto$$

En esta caso particular, como el Divisor $(x-a)$ es un polinomio de primer grado, el Resto será un número real (es decir, el Resto es un polinomio de grado cero). Si evaluamos el Dividendo $P(x)$ en el valor $x=a$, tendremos:

$$P(a)=(a-a)\times C(a)+Resto \rightarrow P(a)=Resto$$

Es decir, **el Resto de la división $\frac{P(x)}{(x-a)}$ coincide con el valor del polinomio $P(x)$ evaluado en $x = a$**. Por lo tanto, si encontramos un valor $x = a$ que haga que $P(a) = 0$, diremos que $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$. Y esta es la base teórica que justifica la **regla de Ruffini** para extraer (por ensayo y error) las raíces de un polinomio.

En Ruffini es recomendable probar con los siguientes valores:

- Los divisores del término independiente (con signo $\pm$).
- Si el coeficiente líder es distinto de uno, probar con el cociente de los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente líder (con signo $\pm$).

Por ejemplo: Si $P(x)$ es un polinomio de grado tres, con coeficiente líder k, y con tres raíces $x = a, x = b\ y\ x = c$, el polinomio quedará factorizado como $P(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$. **No olvidar el coeficiente líder al factorizar el polinomio**.

La **función parábola** es la representación gráfica de un polinomio de grado dos:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

- En el eje horizontal (abscisas) representamos los valores de la variable x. En el eje vertical (ordenadas) representamos los valores de la imagen $f(x)$.
- La parábola siempre tiene un **vértice** (que puede ser máximo o mínimo absoluto de la imagen). La gráfica de la parábola siempre es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por el vértice.
- Si el coeficiente líder a es positivo, la parábola es convexa y el vértice es un mínimo absoluto. Si el coeficiente líder a es negativo, la parábola es cóncava y el vértice es un máximo absoluto.
- La coordenada horizontal del vértice se obtiene con la expresión $x_{vértice} = \frac{-b}{2\,a}$. Cuando sepamos derivar en el Tema 9, demostraremos esta fórmula.
- Los posibles puntos de corte de la parábola con el eje horizontal implica encontrar los cortes entre la función y la recta horizontal $y = 0$. Por lo tanto, deberemos resolver la ecuación de segundo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Una parábola puede cortar dos veces, una o ninguna al eje horizontal, según sean las soluciones de la ecuación de segundo grado anterior.
- El corte de la parábola con el eje vertical implica sustituir $x = 0$ en la función parábola. Por lo tanto, las coordenadas del corte con el eje vertical son $(0, c)$. Una parábola siempre corta al eje vertical.
- Si el término independiente de la parábola es $c = 0$, significa que la parábola pasa seguro por el origen de coordenadas $(0,0)$.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, **obtener los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones implica resolver la ecuación formada por la igualdad $f(x) = g(x)$**. En los puntos de corte, la imagen de ambas funciones coinciden.

Los **sistemas de ecuaciones lineales** son un conjunto de ecuaciones donde las incógnitas aparecen multiplicadas por coeficientes reales y están elevadas a la primera potencia. Los sistemas se pueden resolver por **sustitución, igualación y reducción**. El **método de Gauss** no es más que aplicar el método de reducción varias veces, para conseguir despejar de cada ecuación el valor de una única incógnita. En el Tema 4 profundizaremos bastante en la resolución por Gauss de sistemas lineales y su relación con la geometría.

También podemos encontrar **sistemas no lineales**, donde la incógnitas se multipliquen entre sí, o donde las incógnitas aparezcan elevadas a exponentes distinto de uno.

Las soluciones de un sistema deben cumplir todas y cada una de las ecuaciones de partida.

Una inecuación es una desigualdad matemática con al menos una incógnita. Resolver la inecuación implica obtener los intervalos de la/las incógnitas que cumplen el sentido de la desigualdad. **La solución de una inecuación de una incógnita no será un valor concreto sino un intervalo (o un conjunto de intervalos)**.

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número, el resultado es una inecuación equivalente (con la misma solución). Si se les multiplica o divide por un mismo número positivo, el resultado también es equivalente (con la misma solución). Pero si se multiplica o se divide por un mismo número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad.

- $x^2 + 2x + 1 \geq 3x - 2 \rightarrow$ equivalente al restar 7 $\rightarrow x^2 + 2x + 1 - 7 \geq 3x - 2 - 7$
- $x^2 + 2x + 1 \geq 3x - 2 \rightarrow$ equivalente al dividir por 4 $\rightarrow \frac{x^2+2x+1}{4} \geq \frac{3x-2}{4}$
- $x^2 + 2x + 1 \geq 3x - 2 \rightarrow$ cambia de sentido la desigualdad al multiplicar por (-1) $\rightarrow -(x^2 + 2x + 1) \leq -(3x - 2)$

En un sistema de inecuaciones lineales de una incógnita debemos resolver cada inecuación por separado, siendo la solución final del sistema la **intersección de los conjuntos soluciones de cada inecuación**.

Para resolver inecuaciones de polinomios o de cociente de polinomios, razonamos así:

- Reducimos los términos a una única fracción en un lado de la desigualdad, y hallamos las raíces del numerador y del denominador.
- Representamos las raíces en la recta real, sabiendo que las raíces del denominador siempre serán puntos abiertos en la recta real para evitar que el denominador sea nulo (recuerda que no está permitido dividir por 0). Las raíces del numerador serán cerradas solo si aparece el signo igual dentro de la desigualdad.
- Tomamos un punto interior de cada intervalo y evaluamos el signo que toma la fracción de polinomios.
- La solución será la unión de los intervalos que tengan el mismo signo de la desigualdad de partida.

En un **sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas**, **la solución se obtiene gráficamente como una parte del plano XY que cumple todas las desigualdades del sistema**. Con cada inecuación de dos incógnitas se razona así:

- Transformamos la inecuación del sistema en una igualdad, obteniendo una recta.
  - Pintamos en el plano la recta, dando dos valores a la variable independiente y obteniendo los correspondientes valores de la variable dependiente.
  - La recta divide al plano en dos zonas. Tomamos un punto arbitrario en alguna de las dos zonas y evaluamos ese punto en la inecuación. Si se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto; si no, la solución será el otro semiplano.
  - Si la desigualdad incluye el signo igual, los puntos que pertenecen a la recta también serán solución.
- Repetir los pasos anteriores para cada una de las inecuaciones del sistema.
- La solución final del sistema será la intersección de las regiones solución de cada inecuación. Obtendremos una región del plano, que podrá ser acotada o no acotada. Los vértices que delimitan la región solución (**región factible**) se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones 2x2 de las rectas que se cortan formando cada vértice.

En el Tema 4 resolveremos **sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas en contextos reales**, formando los conocidos como problemas de **programación lineal**.

El **valor absoluto es un operador matemático que convierte en positivo lo negativo**. Este operador se puede aplicar a números, a ecuaciones, a inecuaciones o a funciones.

En las **ecuaciones que contienen valor absoluto debemos eliminar, en primer lugar, las barras del valor absoluto**. ¿Cómo se hace?

- Obtenemos las raíces del argumento contenido dentro del valor absoluto. Si en el argumento aparecen cocientes de polinomios, se deja todo en una sola fracción y sacamos las raíces del numerador y del denominador por separado.
- Representamos en la recta real estas raíces. Las raíces del numerador serán cerradas y las raíces del denominador serán abiertas.
- Tomamos un punto del interior de cada intervalo y aplicamos la definición general del valor absoluto: donde el argumento sea positivo, quitamos simplemente las barras. Y donde el argumento sea negativo, quitamos las barras y anteponemos un signo negativo para cambiar a positivo el signo del argumento.
- Así tendremos una ecuación distinta para cada intervalo, que resolveremos una a una. **Importante: hay que comprobar que la solución de cada ecuación pertenece al intervalo para el que está definida esa ecuación**.

Si la ecuación contiene dos o más valores absolutos, se sacan las raíces de todos los argumentos, se forman todos los intervalos posibles y se va mirando el signo que toma cada argumento en cada intervalo. Y aplicamos en cada argumento el razonamiento general que antes hemos detallado.

Si la ecuación contiene un valor absoluto dentro de otro valor absoluto, primero se aplica el razonamiento general al valor absoluto que está dentro, y luego se aplica el razonamiento al valor absoluto de fuera.

Un caso particular de valor absoluto mucho más sencillo de operar es el siguiente: **Si la ecuación contiene un valor absoluto en un miembro igualado a un número en el otro miembro**, quitaremos directamente las barras de valor absoluto y antepondremos los dos signos + - delante del número, obteniendo así dos ecuaciones distintas a resolver (una ecuación con el signo + delante del número, y otra ecuación con el signo – delante del número).

Si encontramos una **inecuación con valor absoluto**, se sacan las raíces del argumento del valor absoluto, se forman los intervalos en la recta real, se aplica el razonamiento general y se resuelve una a una cada inecuación en su intervalo correspondiente. Una propiedad especialmente útil en estos casos es:

$$|P(x)| \leq k, siendo\ P(x)\ un\ polinomio\ y\ siendo\ k > 0 \Longrightarrow -k \leq P(x) \leq k$$

Dibujar gráficas de funciones $f(x)$ con valor absoluto:

- Si solo una parte de la fórmula de la función está afectada por el operador valor absoluto, antes de dibujar la gráfica, debemos romper el valor absoluto. Esto implica romper la función en distintos tramos según marquen las raíces del argumento del valor absoluto. Y representar, por separado, la gráfica de cada tramo.
- Si el valor absoluto afecta a toda la fórmula de la función, la forma más sencilla de razonar es la siguiente: dibujamos primero la gráfica de la función contenida en el argumento, y luego pasamos a positivo (por encima del eje horizontal) la parte de la gráfica que haya quedado por debajo del eje horizontal.

El **dominio de una función $f(x)$** son los valores permitidos de la variable x que podemos sustituir dentro de la función:

- El dominio de una función polinómica es toda la recta real.
- El dominio de una función racional es toda la recta real menos los valores que anulan al denominador.

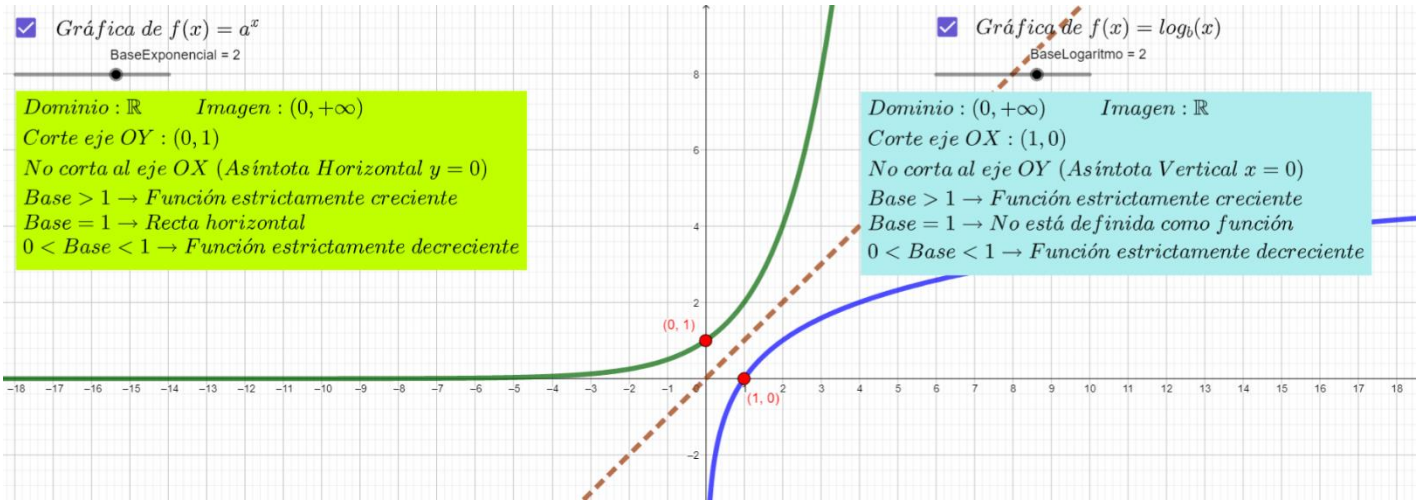
La **función exponencial de base $a > 0$** hace corresponder, a cada número real x, el valor a^x:

- Si $a > 1 \rightarrow f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente.
- Si $a = 1 \rightarrow f(x) = 1^x$ es una recta horizontal $f(x) = 1$.
- Si $a < 1 \rightarrow f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente.
- El dominio de $f(x) = a^x$ es toda la recta real. La función pasa por el punto $(0,1)$.

La **función logaritmo de base $a > 0$** es la función inversa de la función exponencial. Es decir:

- $\log_a x = y \rightarrow$ aplicamos exponencial de base $a \rightarrow x = a^y$. ¿Cómo entender la función logaritmo $\log_a x = y$? Significa "¿A qué valor debemos elevar a para obtener x?". La respuesta a esta pregunta sería: $a^y = x$.
- En $f(x) = \log_a x$ el término a es la base del logaritmo.
  - La base a no puede ser negativa, porque tampoco existe la función exponencial de base negativa.
  - Si $a > 1 \rightarrow f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente creciente.
  - Si $a = 1 \rightarrow$ No es una función, ya que 1 elevado a cualquier número real siempre da 1.
  - Si $a < 1 \rightarrow f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente decreciente.
  - El dominio de $f(x) = \log_a x$ es $(0, +\infty)$. La función pasa por el punto $(1, 0)$.

La gráfica de dos funciones inversas entre sí son simétricas respecto de la recta $y = x$. Además, en la composición de funciones se cumple que: $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$.



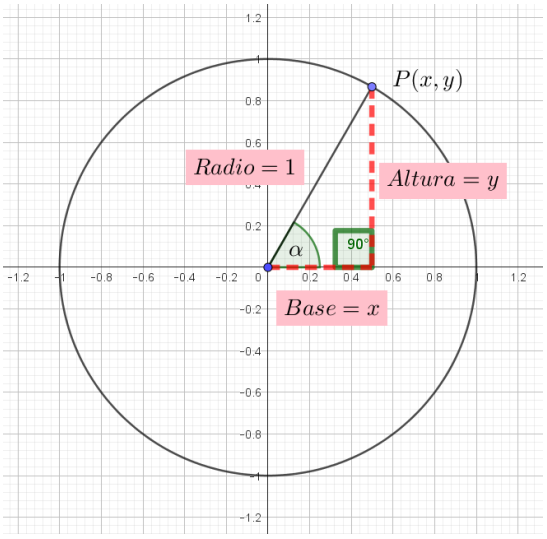
Si conocemos la gráfica de una función $f(x)$ es fácil **desplazar su gráfica vertical y horizontalmente**:

- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x) + k$ implica desplazar verticalmente, hacia arriba, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.
- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x) - k$ implica desplazar verticalmente, hacia abajo, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.
- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x + k)$ implica desplazar horizontalmente, hacia la izquierda, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.
- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x - k)$ implica desplazar horizontalmente, hacia la derecha, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.

RESUMEN TEORÍA TEMA 2: TRIGONOMETRÍA

La **circunferencia goniométrica** es aquella que está centrada en el origen de coordenadas y posee radio unidad. Por Pitágoras es fácil comprobar que su ecuación es:

$$Circunferencia\ goniométrica: x^2 + y^2 = 1$$



En el triángulo rectángulo que aparece en la imagen anterior, definimos las razones trigonométricas del ángulo α:

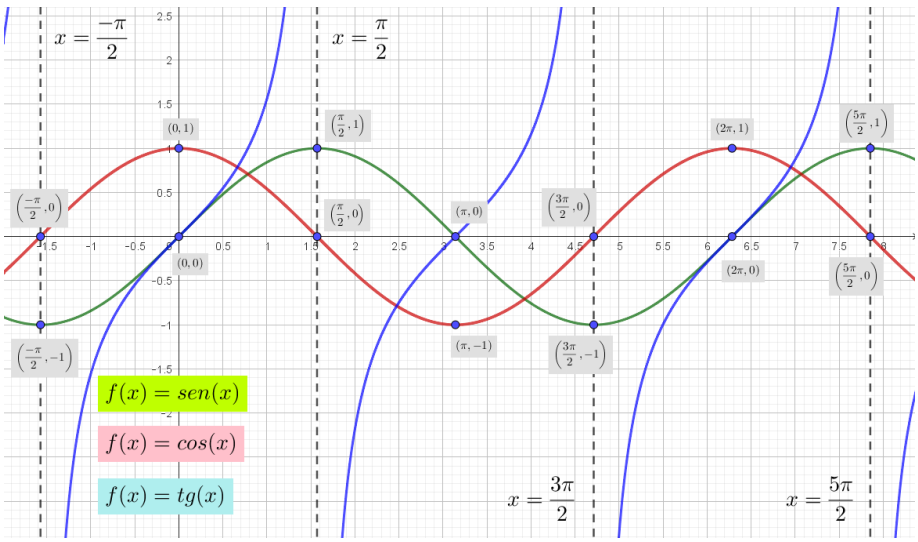
- $sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{1} = y$
- $cos(\alpha) = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{x}{1} = x$
- $tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{y}{x} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

En la circunferencia goniométrica el seno del ángulo α coincide con la altura del triángulo rectángulo. Por lo tanto: El seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, y el seno es negativo en el tercer y cuarto cuadrante.

En la circunferencia goniométrica el coseno del ángulo α coincide con la base del triángulo rectángulo. Por lo tanto: El coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante, y el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante.

La tangente es igual al cociente entre el seno y el coseno. Por lo tanto: La tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, y la tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante.

La siguiente gráfica muestra las curvas de estas tres razones trigonométricas. Los ángulos, en el eje horizontal, se representan en radianes. Recuerda que **π radianes equivale a 180º**. En la **calculadora**, el **modo RAD** representa radianes; mientras que el **modo DEG** representa grados.



Mirando las gráficas superiores es fácil comprender las siguientes propiedades:

- El dominio de $f(x) = sen(x)$ y de $f(x) = cos(x)$ es toda la recta real. Además, la imagen de ambas funciones está acotada el intervalo $[-1,1]$. Ambas funciones tienen periodicidad 2π radianes.
- El dominio de $f(x) = tg(x)$ es toda la recta real menos los valores donde $cos(x)$ se hace igual a cero. Recuerda que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$. Las rectas verticales $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{5\pi}{2}$, … , indican los valores donde $cos(x)$ es igual a cero. La imagen de la función tangente es toda la recta real. La función tangente tiene periodicidad π radianes.
- Los puntos donde se cortan la gráfica de $f(x) = sen(x)$ y de $f(x) = cos(x)$ son las soluciones de la ecuación que resulta de igualar ambas funciones: $sen(x) = \cos(x)$. Las infinitas soluciones de esta ecuación son los

valores $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{5\pi}{4}$, $x = \pm\frac{9\pi}{4}$, etc. Estos valores son los ángulos donde el seno y el coseno toman el mismo valor.

Tanto el seno, el coseno y la tangente de un ángulo devuelven un número real. Si calculamos la inversa de ese número real llegamos a las siguientes razones:

- $cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$ (no confundir con el arcoseno, que es la función inversa de la función seno)
- $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$ (no confundir con el arcocoseno, que es la función inversa de la función coseno)
- $cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$ (no confundir con la arcotangente, que es la función inversa de la función tangente)

De la circunferencia trigonométrica es inmediato obtener la **relación fundamental de trigonometría**:

$$\cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1$$

Si dividimos ambos miembros por seno al cuadrado, llegamos a otra forma de expresión de la relación fundamental:

$$cotg^2(\alpha) + 1 = cosec^2(\alpha)$$

Y si dividimos en la relación fundamental ambos miembros por coseno al cuadrado:

$$1 + tg^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$$

Con ayuda de la **calculadora** y de las **funciones inversas**, podemos obtener los valores de los ángulos que cumplen las siguientes condiciones (**ojo a los diferentes cuadrantes solución**):

- $sen(\alpha) = k > 0 \rightarrow \alpha = arcsen(k)\ la\ calculadora\ da\ \alpha\ en\ el\ primer\ cuadrante \rightarrow 180° - \alpha\ es\ del\ segundo\ cuadrante.$
- $sen(\alpha) = k < 0 \rightarrow \alpha = arcsen(k)\ la\ calculadora\ de\ un\ ángulo\ negativo\ del\ cuarto\ cuadrante \rightarrow debemos\ operar\ 360° + \alpha\ para\ expresar\ el\ ángulo\ del\ cuarto\ cuadrante\ en\ positivo \rightarrow 180° + |\alpha|\ da\ la\ solución\ del\ tercer\ cuadrante.$
- $\cos(\alpha) = k > 0 \rightarrow \alpha = arcos(k)\ la\ calculadora\ da\ un\ ángulo\ del\ primer\ cuadrante \rightarrow 360° - \alpha\ es\ del\ cuarto\ cuadrante.$
- $\cos(\alpha) = k < 0 \rightarrow \alpha = arcos(k)\ la\ calculadora\ da\ un\ ángulo\ del\ segundo\ cuadrante \rightarrow 360° - \alpha\ es\ del\ tercer\ cuadrante.$
- $tg(\alpha) = k > 0 \rightarrow \alpha = arctg(k)\ la\ calculadora\ da\ un\ ángulo\ del\ primer\ cuadrante \rightarrow 180° + \alpha\ es\ del\ tercer\ cuadrante.$
- $tg(\alpha) = k < 0 \rightarrow \alpha = arctg(k)\ la\ calculadora\ de\ un\ ángulo\ negativo\ del\ cuarto\ cuadrante \rightarrow debemos\ operar\ 360° + \alpha\ para\ expresar\ el\ ángulo\ del\ cuarto\ cuadrante\ en\ positivo \rightarrow 180° + \alpha\ da\ la\ solución\ del\ segundo\ cuadrante.$

Las funciones trigonométricas inversas cumplen lo siguiente:

- $arcsen[sen(\alpha)] = sen[arcsen(\alpha)] = \alpha$
- $arccos[cos(\alpha)] = \cos[\arccos(\alpha)] = \alpha$
- $arctg[tg(\alpha)] = tg[arctg(\alpha)] = \alpha$

Como ya vimos en el tema anterior con la función exponencial y la función logaritmo, al componer una función con su función inversa, el resultado es la función identidad.

Si el ángulo α es la solución de una ecuación con razones trigonométricas, también serán solución los infinitos ángulos que se obtienen de realizar vueltas completas en la circunferencia goniométrica:

$$\alpha \pm 360° \times k, siendo\ k \epsilon \mathcal{N}$$

Fórmulas de suma y diferencia de ángulos, ángulo doble y ángulo mitad:

- Seno de la suma: $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- Seno de la diferencia: $sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- Coseno de la suma: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- Coseno de la diferencia: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- Tangente de la suma: $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$
- Tangente de la diferencia: $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$
- Seno del ángulo doble: $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$
- Coseno del ángulo doble: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$
- Tangente del ángulo doble: $tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$
- Seno del ángulo mitad: $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
- Coseno del ángulo mitad: $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
- Tangente del ángulo mitad: $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

Teoremas del seno y del coseno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{C})$$

$$a, b, c\ lados\ del\ triángulo.\ \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\ ángulos\ del\ triángulo.\ R\ radio\ de\ la\ circunferencia\ circunscrita$$

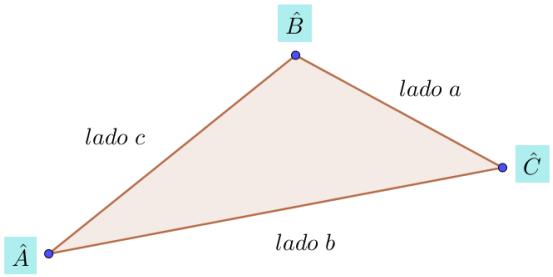
Área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sen(\hat{A})$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen(\hat{B})$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\hat{C})$$



RESUMEN TEORÍA TEMA 3: NÚMEROS COMPLEJOS

Definimos la **unidad imaginaria**:

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

De esta forma, una ecuación como la siguiente tiene solución en el cuerpo de los números complejos ($\mathbb{C}$):

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De manera general, podemos definir cualquier número complejo con la **notación binómica:**

$$\boldsymbol{z = a + b \cdot i}$$

$$\boldsymbol{Siendo\ a, b\ \epsilon\ \mathcal{R}}$$

Es común reservar la letra "z" en vez de "x" para trabajar con números complejos. La parte que hemos llamado a se denomina **parte real**. Mientras que la parte que hemos llamado b, y que multiplica a la unidad imaginaria, se conoce como **parte imaginaria**.

Para **sumar y restar números complejos en forma binómica**, se operan las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro lado. Por ejemplo:

$$z_1 = 2 + 3i\ ,\ z_2 = 5 - 7i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i)$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 5) + (3 - 7)i$$

$$z_1 + z_2 = 7 - 4i$$

Multiplicamos números complejos en forma binómica realizando todas las combinaciones de productos, y usando la definición de unidad imaginaria:

$$z_1 = 2 + 3i\ ,\ z_2 = 5 - 7i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (5 - 7i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 10 - 14i + 15i - 21i^2$$

$$Usamos\ la\ relación\ i^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = 10 - 14i + 15i - 21 \cdot (-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 10 - 14i + 15i + 21$$

$$z_1 \cdot z_2 = 31 + i$$

Dado un complejo $z = a + b \cdot i$ su **conjugado implica cambiar el signo de la parte imaginaria**: $\bar{z} = a - b \cdot i$.

Para **dividir complejos en forma binómica**, debemos multiplicar y dividir por el conjugado del denominador. De esta forma, eliminaremos la unidad imaginaria del denominador.

$$z_1 = 2 + 3i\ ,\ z_2 = 5 - 7i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{5 - 7i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{5 - 7i} \cdot \frac{5 + 7i}{5 + 7i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 - (7i)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 - 49i^2}$$

$$Usamos\ la\ relación\ i^2 = -1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 14i + 15i + 21(-1)}{5^2 - 49(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 14i + 15i - 21}{25 + 49}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-11 + 29i}{74} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i$$

El producto de un número complejo por su conjugado da siempre, como resultado, un número real:

$$z = a + b \cdot i\ ,\ \bar{z} = a - b \cdot i$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) \rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 - (bi)^2 \rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 \rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2(-1) \rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2\ \epsilon\ \mathcal{R}$$

La raíz cuadrada de un número complejo en forma binómica da, como resultado, otro número complejo en forma binómica:

$$\sqrt{a+bi} = c+di \rightarrow a+bi = (c+di)^2 \rightarrow a+bi = c^2+(di)^2+2cdi \rightarrow a+bi = c^2-d^2+2cdi$$

Dos números complejos son iguales si sus partes reales son iguales y si sus partes imaginarias son iguales.

$$\left.\begin{matrix} a = c^2-d^2 \\ b = 2cd \end{matrix}\right\}$$

Los coeficientes a y b son valores conocidos del número complejo de partida.

Resolviendo el sistema $2x2$ obtendremos las soluciones de las incógnitas c y d.

Importante: los valores solución c y d son números reales.

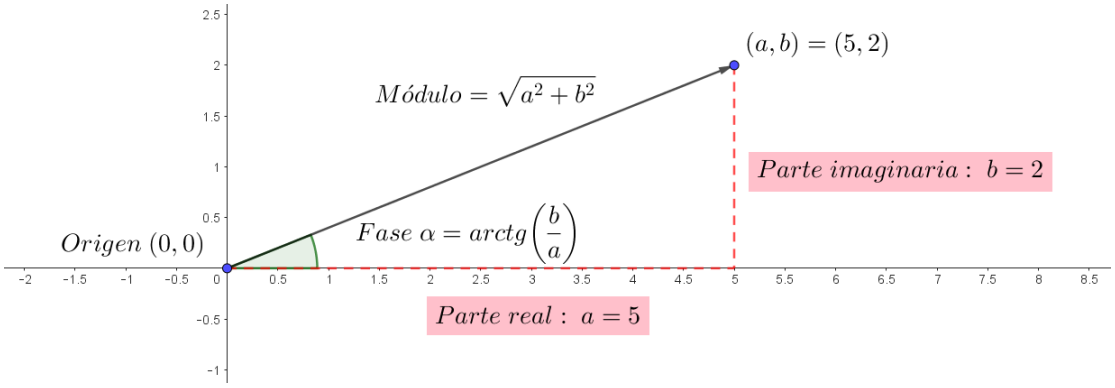
El valor de la potencia i^m de la unidad imaginaria, se repite de cuatro en cuatro. Por lo que podemos estudiar i^m desde el caso más sencillo i^r, siendo r el resto de la división entera $\frac{m}{4}$.

Resto 0	$i^0 = 1$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$
Resto 1	$i^1 = i$	$i^1 = i$	$i^9 = i$	$i^{13} = i$
Resto 2	$i^2 = -1$	$i^6 = i^5 \cdot i = -1$	$i^{10} = -1$	…
Resto 3	$i^3 = i \cdot i^2 = -i$	$i^7 = i^6 \cdot i = -i$	$i^{11} = -i$	…

Realizar la potencia de un número complejo en forma binómica $(a+bi)^m$ nos lleva al desarrollo del binomio de Newton de orden m. Para evitar el largo desarrollo del binomio de Newton, aprenderemos a trabajar con notación polar. Para ello, en primer lugar, hablaremos de la notación afija en el plano complejo:

$$\textbf{Notación binómica: } z = a+b\cdot i \rightarrow \textbf{Notación afija: } z = (a,b)$$

El plano complejo es un plano cartesiano de dos ejes. El eje horizontal representa la parte real y el eje vertical representa la parte imaginaria del número complejo.



Si unimos con una flecha el origen del plano complejo $(0,0)$ con el afijo de un número (a,b), tendremos un vector complejo**. La longitud de ese vector se llama módulo del complejo**, y por el Teorema de Pitágoras es inmediato su valor:

$$\textbf{Módulo de un número complejo: } |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

El **ángulo que forma el vector con el semieje positivo horizontal se denomina fase del número complejo**:

$$\textbf{Fase de un número complejo: } \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Si aplicamos vueltas completas $\alpha \pm 360° \times k$, siendo $k \epsilon \mathcal{N}$, llegamos a la misma tangente del ángulo α

Con el módulo y la fase podemos escribir el número complejo en forma polar:

$$\textbf{Notación polar: } z = |z|_{\alpha \pm 360° \times k,\ \text{siendo } k \epsilon \mathcal{N}}$$

El **producto de dos números complejos en forma polar** es igual al producto de los módulos y a la suma de las fases:

$$z_1 = |z_1|_\alpha\ ,\ z_2 = |z_2|_\beta$$

$$z_1 \times z_2 = (|z_1| \times |z_2|)_{\alpha+\beta}$$

El **cociente de dos números complejos en forma polar** es igual al cociente de los módulos y a la resta de la fase del numerador menos la fase del denominador:

$$z_1 = |z_1|_\alpha\ ,\ z_2 = |z_2|_\beta$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)_{\alpha-\beta}$$

La **potencia de un número complejo en forma polar** da como resultado otro número complejo de módulo igual al módulo de partida elevado al exponente de la potencia, y de fase igual a la fase original multiplicada por el exponente de la potencia.

$$z = |z|_{\alpha}$$
$$z^n = (|z|)^n{}_{n \times \alpha}$$

La **raíz de orden n de un número complejo da como resultado n soluciones**. Si trabajamos en forma polar, todas las soluciones comparten el mismo valor del módulo y solo hay diferencia en las fases:

$$z = |z|_{\alpha}$$
$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_{\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}}$$
$$Siendo\ k\ un\ número\ natural\ del\ intervalo\ [0, 1, 2, \dots, n-1]$$

Las n soluciones resultantes de una raíz de orden n forman un polígono regular centrado en el origen de coordenadas del plano complejo.

La distancia que separa dos puntos A y B en el plano complejo se calcula como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

Pasamos de notación binómica a notación polar calculando el módulo y la fase. Y podemos revertir el proceso con la notación trigonométrica:

$$Notación\ polar: z = |z|_{\alpha}$$
$$\boldsymbol{Notación\ trigonométrica: z = |z| \cdot cos(\alpha) + |z| \cdot sen(\alpha) \cdot i}$$

Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces. Estas raíces pueden ser reales y/o complejas.

Dos consecuencias de este Teorema son:

- Si un número complejo z es solución de una ecuación polinómica, también será solución su conjugado $\bar{z}$.
- El número de soluciones complejas de una ecuación polinómica siempre será igual a un número par.

RESUMEN TEORÍA TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES. PROGRAMACIÓN LINEAL

Ampliamos lo ya estudiado en el Tema 1 de este curso, donde repasamos la resolución de sistemas 2x2, 2x3, 3x2, 3x3, introdujimos el método de Gauss y resolvimos gráficamente sistemas de inecuaciones de dos incógnitas.

Al escribir un **sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas**, en notación matricial, tendremos tantas filas como ecuaciones y tantas columnas como el número de incógnitas más uno, ya que añadimos la columna de términos independientes (c_1 , c_2 , c_3 …).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$

Los coeficientes a_{ij} de la diagonal principal son aquellos donde el número de filas (primer subíndice) coincide con el número de columnas (segundo subíndice): a_{11} , a_{22} , a_{33} …

En el método de Gauss buscamos hacer 0 los coeficientes situados por debajo de la diagonal principal:

- Podemos intercambiar la posición de dos columnas (sin incluir la columna de términos independientes).
- Podemos intercambiar la posición de dos filas.
- Podemos operar con transformaciones lineales entre filas: $F_i' = a \cdot F_i + b \cdot F_j \ \ con\ a \neq 0$.
- Una fila con todos los coeficientes y con el término independiente igual a 0 se puede eliminar (porque será una combinación lineal del resto de ecuaciones).
- Una fila con todos los coeficientes nulos y el término independiente distinto de 0 es un absurdo matemático.
- Si hay dos filas con los coeficientes y los términos independientes proporcionales entre sí, implica que podemos eliminar una de las filas (por ser combinación lineal de la otra).
- **Tras terminar el método de Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos y eliminar las filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente a_{ij} distinto de 0**.

En **sistemas de ecuaciones con un parámetro inicial** k, los tipos de solución dependerán del valor de ese parámetro. Tras terminar el método de Gauss, debemos estar atentos a los siguientes casos:

- Si un coeficiente de la diagonal principal depende del parámetro k, debemos igualar ese coeficiente a 0 para realizar la discusión de casos.
- Si un coeficiente de la diagonal principal es 0, debemos buscar (si hay) el primer coeficiente de esa fila que dependa del parámetro k. Y de encontrarlo, debemos igualar ese coeficiente a 0 para realizar la discusión de casos.
- Si todos los coeficiente de una fila son iguales a 0, y el término independiente de esa fila depende del parámetro k, debemos igualar a 0 el término independiente de esa fila para realizar la discusión de casos.

En la discusión de casos, tras completar el método de Gauss, razonamos así:

- Si aparece un absurdo matemático, tendremos Sistema Incompatible (S.I.) porque no hay solución. Los absurdos pueden ser de dos tipos:
  - 0 igual a un número distinto de 0.
  - Dos ecuaciones donde una misma incógnita tome, como solución, dos valores distintos.
- Si el rango del sistema es menor al número de incógnitas, tendremos Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.) con infinitas soluciones. La diferencia entre el número de incógnitas y el rango del sistema coincide con el número de parámetros libres.
- Si el rango del sistema es igual al número de incógnitas, tendremos Sistema Compatible Determinado (S.C.D.) con solución única.

En sistemas de ecuaciones lineales, las incógnitas (x, y, z …) pueden tener o una única solución o infinitas soluciones. Si una incógnita tiene 2 o 3 soluciones distintas, significa que estamos frente a un absurdo matemático y el sistema será Sistema Incompatible.

Los **sistemas homogéneos son aquellos donde todos los términos independientes son iguales a cero**. Los sistemas homogéneos siempre tienen solución, por lo que nunca pueden ser incompatibles. Si la solución es única, será la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (en un ejemplo de sistema 3x3).

La **relación entre álgebra y geometría en sistemas 3x3** es la siguiente:

- Una ecuación lineal con tres incógnitas $Ax + By + Cz + D = 0$ representa a un plano en el espacio tridimensional.
- Si estamos en S.C.D. significa que la solución está formada por tres planos que se cortan en un único punto.
- Si hay un parámetro libre en S.C.I., significa que la solución está formada por tres planos que se cortan en una recta.
- Si hay dos parámetros libres en S.C.I., los tres planos están superpuestos (planos coincidentes).

El siguiente enlace a la web *Matrix Calculator* es muy práctico para comprobar nuestras operaciones con sistemas de ecuaciones:

https://matrixcalc.org/es

Un **sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas se resuelve gráficamente**, dibujando la solución (**región factible**) en un sistema de coordenadas de dos dimensiones. Los problemas de contexto real sobre

inecuaciones lineales forman los ejercicios de **programación lineal**, donde debemos optimizar una **función objetivo** $\boldsymbol{f(x,y)}$ en el interior de la región factible.

Optimizar significa obtener el máximo (maximizar) o el mínimo (minimizar) de los valores que devuelve la función objetivo $f(x,y)$.

El **Teorema Fundamental de la Programación Lineal** afirma que si la región factible es acotada y convexa, la función objetivo se optimiza en al menos uno de sus vértices. Si dos vértices consecutivos optimizan la función objetivo, significa que todos los puntos del segmento que une ambos vértices forman parte de la solución.

Si la región factible es no acotada, no tenemos garantizado que el problema de optimización tenga solución; pero si la tiene, aparece en al menos uno de los vértices.

RESUMEN TEORÍA TEMA 5: VECTORES

Sean dos puntos en un espacio de n-componentes (por norma general trabajaremos en 2 o 3 dimensiones):

$$A(x_A, y_A, z_A, \dots)$$
$$B(x_B, y_B, z_B, \dots)$$

Definimos el **vector con inicio en A y final en B** con la expresión:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ , y_B - y_A\ , z_B - z_A\ , \dots)$$

La **dirección del vector** la marca la línea recta que pasa por A y B.

El **sentido del vector** lo indica la orientación de la flecha (desde A hacia B).

Y la **longitud del vector** se obtiene con el módulo:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + \cdots}$$

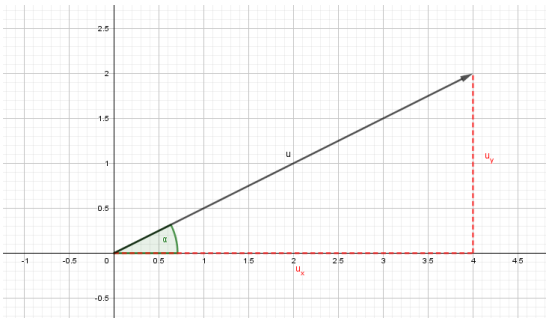
Si un vector lo iniciamos en el origen de coordenadas, hablaremos de su representante canónico:

$$\vec{u} = (u_x, u_y\ , u_z, \dots)$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + \cdots}$$

Al dividir un vector $\vec{u}$ por su módulo $|\vec{u}|$, obtenemos su **vector unitario**: mismo dirección que $\vec{u}$, mismo sentido que $\vec{u}$, pero con módulo igual a uno.

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

En dos dimensiones, es muy fácil dibujar el representante canónico. La base del triángulo rectángulo de la imagen de la derecha coincide con la primera componente del vector (u_x). La altura del triángulo es la segunda componente del vector (u_y). La longitud de la hipotenusa coincide con el módulo del vector $\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right)$.



Solo en dos dimensiones hablaremos de la pendiente del vector, que no es más que la tangente del ángulo que forma la hipotenusa con la base del triángulo de la imagen de la derecha.

$$pendiente = m_{\overrightarrow{AB}} = tg(\alpha) = \frac{u_y}{u_x}$$

El producto de las pendientes de dos vectores de dos dimensiones perpendiculares es igual a -1.

Dado un vector de dos dimensiones $\vec{u} = (a, b)$ es fácil obtener un vector perpendicular a él intercambiando la posición de las componentes y cambiando el signo a solo una de las componentes:

$$\vec{u} = (a, b)$$
$$\vec{v} = (-b, a)\ es\ perpendicuclar\ a\ \vec{u}$$
$$\vec{w} = (b, -a)\ es\ perpendicuclar\ a\ \vec{u}$$

Dos vectores son proporcionales si cumplen:

$$\vec{u} = (u_x, u_y\ , u_z, \dots)$$
$$\vec{v} = (v_x, v_y\ , v_z, \dots)$$
$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z} = \cdots = k \epsilon \mathcal{R}$$

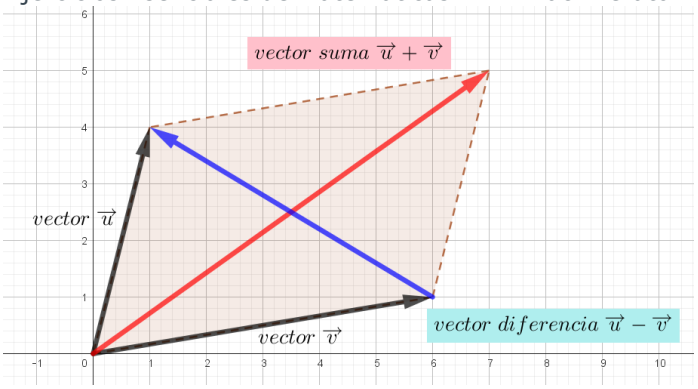
Si k es positivo, los vectores proporcionales son paralelos.

Si k es negativo, los vectores proporcionales son opuestos (antiparalelos).

Propiedades a la hora de operar con vectores:

- $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_x\ , k \cdot u_y\ , k \cdot u_z\ , \dots)$
- $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x\ , u_y + v_y\ , u_z + v_z\ , \dots)$
- $Definición\ del\ producto\ escalar$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$
- $Vectores\ unitarios\ paralelos\ a\ los\ ejes\ (base\ canónica)$: $\hat{\imath} = (1,0,0, \dots), \hat{\jmath} = (0,1,0, \dots), \hat{k} = (0,0,1, \dots), \dots$
- $Vector\ expresado\ en\ función\ de\ la\ base\ canónica$: $\vec{u}(u_x\ , u_y\ , u_z\ , \dots) = u_x \cdot \hat{\imath} + u_y \cdot \hat{\jmath} + u_z \cdot \hat{k} + \cdots$
- $Fórmula\ analítica\ del\ producto\ escalar$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cdots$
- $Ángulo\ entre\ dos\ vectores$: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cdots}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- $Dos\ vectores\ no\ nulos\ son\ perpendiculares\ si\ y\ solo\ si\ su\ producto\ escalar\ es\ nulo.$

Si dibujamos los representantes canónicos de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, formarán dos lados de un paralelogramo (ver imagen de la derecha).



El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ es un vector que coincide con la diagonal mayor del paralelogramo.

El vector diferencia $\vec{u}-\vec{v}$ es un vector que coincide con la diagonal menor del paralelogramo, siendo el sentido desde el final del vector $\vec{v}$ al final del vector $\vec{u}$.

Existen muchos **tipos de paralelogramos**, por lo que es importante que comprendamos las propiedades de cada tipo:

- Todos los paralelogramos tienen los lados opuestos paralelos.
- La suma de los cuatro ángulos internos de un paralelogramo siempre es $360°$.
- Un paralelogramo siempre se puede dividir en dos triángulos idénticos.
- Si los ángulos internos son ángulos rectos, el paralelogramo se llama rectángulo.
- Si los cuatro lados tienen la misma longitud, el paralelogramo se llama rombo.
- Si los ángulos internos son ángulos rectos y los cuatro lados tienen la misma longitud, el paralelogramo se llama cuadrado. Por lo tanto, podemos entender el cuadrado como un caso particular de rectángulo o como un caso particular de rombo.
- Solamente en los rombos y en los cuadrados las diagonales se cortan de manera perpendicular.
- Solamente en los rombos y en los cuadrados las diagonales dividen en dos partes iguales a los ángulos internos del paralelogramo.
- Un trapecio no es un paralelogramo, porque un trapecio solo tiene dos lados paralelos entre sí.
- El área de un paralelogramo se calcula con el producto de la base por la altura. Pero solo en el rectángulo y en el cuadrado la altura coincide con la longitud de uno de los lados, por ser los ángulos internos ángulos rectos.

Un conjunto de vectores son linealmente independientes entre sí cuando ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros.

La forma más práctica para determinar si un conjunto de vectores son linealmente independientes es calcular el rango de esos vectores:

- Escribimos los vectores en forma matricial. Da igual si escribimos los vectores como filas o como columnas.
- Tendremos una matriz de m filas y n columnas: matriz $m \times n$. Si intercambiamos filas con columnas, tendremos una matriz $n \times m$.
- Podemos trabajar con cualquiera de las dos configuraciones ($m \times n$ o $n \times m$). Pero si trabajamos con la matriz que tenga el menor número de filas posibles, podremos aplicar de manera más eficiente el método de Gauss por debajo de la diagonal principal (al igual que hacíamos en los sistemas de ecuaciones).
- La forma de aplicar Gauss a la matriz formada por los vectores es idéntica a la que estudiamos en sistemas de ecuaciones, con la salvedad que ahora no tenemos ecuaciones, sino que tenemos vectores. Por lo tanto, no hablaremos de absurdos matemáticos. Tampoco hablaremos de ecuaciones ni de incógnitas, sino que hablaremos de filas y de columnas. Y tampoco hablaremos de sistema, sino de matriz.
- Podemos intercambiar filas entre sí, y también podemos intercambiar columnas entre sí. Además, cuando trabajamos con vectores en forma matricial, las transformaciones lineales se pueden aplicar tanto a las filas como a las columnas.
- **Tras terminar el método de Gauss, y eliminar las filas proporcionales, el rango de la matriz coincide con el número de filas con al menos un coeficiente a_{ij} distinto de 0.**
- Si aparece un parámetro inicial k, podemos estudiar el rango de la matriz en función de los valores de ese parámetro, de forma semejante a como lo hacíamos con los sistemas de ecuaciones.

Si el rango de la matriz de vectores coincide con el número de vectores, diremos que todos los vectores son linealmente independientes. En caso contrario, serán linealmente dependientes.

El rango de un conjunto de vectores coincide con el número de vectores que son linealmente independientes entre sí.

Si un conjunto de vectores no son linealmente independientes, diremos que están en **combinación lineal (sistema ligado)**. Un conjunto de vectores están en combinación lineal si uno de los vectores se puede expresar en función del resto de vectores:

$$\textbf{Combiación lineal: } \vec{u} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} + c \cdot \vec{t} + \cdots$$

Si al menos uno de los coeficientes a, b, c, ... es distinto de cero, diremos que los vectores están en combinación lineal.

Si estamos en n-dimensiones y contamos con un conjunto de k-vectores, formarán un **sistema generador** si el rango de los vectores es igual a n. Un sistema generador significa que cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de los vectores que forman el sistema generador.

Si estamos en n-dimensiones y contamos con un conjunto de n-vectores con rango n, formarán una **base**. Un base es un sistema generador con el menor número de vectores posible.

Si todos los vectores de una base son perpendiculares entre sí, hablaremos de **base ortogonal**. La mejor forma de demostrar que dos vectores son perpendiculares es comprobar que su producto escalar es igual a cero.

Si todos los vectores de una base ortogonal son de módulo unidad, hablaremos de **base ortonormal**.

El **producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ da como resultado otro vector $\vec{w}$** que cumple:

- Notación del producto vectorial: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.
- Es anticonmutativo, es decir: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
- Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\alpha)$.
- Dirección: perpendicular al plano que contienen a los vectores de partida $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Sentido: el marcado por la regla de la mano derecha.
- El área de un paralelogramo formado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede calcular con el módulo del producto vectorial de ambos vectores: $Área = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\alpha)$.
- Como un paralelogramo se divide en dos triángulos iguales, podemos calcular el área del triángulo como la mitad del área del paralelogramo.
- En 2ºBachillerato aprenderemos a calcular las componentes del vector resultante del producto vectorial.

RESUMEN TEORÍA TEMA 6: GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES: RECTAS Y CÓNICAS

Los dos elementos fundamentales de la geometría plana (dos dimensiones) son el punto y la recta. Se representan en un sistema de referencia cartesiano XY, al igual que hicimos en el Tema anterior con los vectores en dos dimensiones.

Las cónicas son superficies planas que surgen al cortar un cono. Nosotros vamos a estudiar en el Tema 6 la circunferencia y la elipse como superficies cónicas. Luego, en el Tema 8, estudiaremos otras superficies cónicas como ejemplos concretos de funciones: la parábola y la hipérbola.

El año que viene, en 2ºBachillerato, estudiaremos la geometría en tres dimensiones e introduciremos un nuevo elemento: el plano en el espacio tridimensional.

En dos dimensiones, dado un punto $A(x_A, y_A)$ y un vector director $\vec{u} = (u_x, u_y)$ podemos obtener la **ecuación de la recta que pasa por el punto y es paralela al vector**:

$$Ecuación\ vectorial\ de\ la\ recta\ r\ en\ dos\ dimensiones: (x,y) = (x_A, y_A) + k \cdot (u_x, u_y)\ \ con\ \ k \epsilon \mathcal{R}$$

$$La\ pendiente\ de\ la\ recta\ coincide\ con\ la\ pendiente\ del\ vector\ director: m_r = m_{\vec{u}} = \frac{u_y}{u_x}$$

$$Ecuación\ paramétrica: \begin{cases} x = x_A + k \cdot u_x \\ y = y_A + k \cdot u_y \end{cases}$$

$$Ecuación\ continua\ o\ cartesiana: \frac{x - x_A}{u_x} = \frac{y - y_A}{u_y}$$

$$Ecuación\ general: A\,x + B\,y + C = 0$$

$$Ecuación\ explícita: y = m\,x + n\ con\ m \equiv pendiente\ y\ n \equiv ordenada\ en\ el\ origen$$

$$Ecuación\ punto - pendiente\ de\ la\ recta: m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ que\ pasa\ por\ dos\ puntos\ A\ y\ B: \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

$$Ecuación\ canónica\ o\ segmentaria: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ \ con\ (a,0)\ corte\ con\ eje\ OX\ y\ con\ (0,b)\ corte\ con\ el\ eje\ OY$$

De la ecuación general de la recta $A\,x + B\,y + C = 0$ podemos obtener la siguiente información:

- El vector de componentes (A, B) es perpendicular a la recta.
- El vector de componentes $(-B, A)$ es paralelo a la recta.
- La pendiente de la recta se calcula como $m_r = \frac{-A}{B}$ y coincide con la pendiente del vector director $m_{\vec{u}} = \frac{u_y}{u_x}$. Esto lleva a la relación $\frac{-A}{B} = \frac{u_y}{u_x}$.
- Si $A = 0$ tendremos una recta horizontal.
- Si $B = 0$ tendremos una recta vertical.
- Si el término independiente cumple $C = 0$ significa que la recta pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$.

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares, al igual que pasaba con dos vectores perpendiculares, es igual a -1. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

$$Si\ r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

$$Si\ r \parallel s \Rightarrow m_r = m_s$$

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r implica obtener el punto de corte de la recta s con la recta r, siendo la recta s perpendicular a r y que pasa por el punto P:

- Partimos del punto $P(x_P, y_P)$ y de la recta $r: y = mx + n$.
- La pendiente de la recta s perpendicular a r será: $m_s = -\frac{1}{m}$.
- La recta s pasa por el punto (x_P, y_P), por lo que su ecuación punto pendiente será $s: -\frac{1}{m} = \frac{y - y_P}{x - x_P}$.
- La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} r: y = mx + n \\ s: -\frac{1}{m} = \frac{y - y_P}{x - x_P} \end{cases}$ da como resultado el punto de corte de ambas rectas, que es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.

Un **punto arbitrario de una recta** es aquel punto que representa a todos los puntos de la recta. ¿Cómo se escribe el punto arbitrario? Colocando en las coordenadas del punto las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$Ecuación\ paramétrica\ de\ la\ recta\ r: \begin{cases} x = x_A + k \cdot u_x \\ y = y_A + k \cdot u_y \end{cases}$$

$$Punto\ arbitario\ de\ la\ recta\ r: A(x_A + k \cdot u_x, y_A + k \cdot u_y)$$

La proyección ortogonal del punto P sobre la recta r también se puede obtener con ayuda del concepto de punto arbitrario de la recta:

- Obtenemos las coordenadas del punto arbitrario de la recta r: $A(x_A + k \cdot u_x, y_A + k \cdot u_y)$.
- Creamos el vector $\overrightarrow{PA}$. Es decir, un vector cuyos extremos son el punto exterior P y el punto arbitrario A.

- Si el vector $\overrightarrow{PA}$ es perpendicular a la recta r, tendremos garantizado que el punto arbitrario A se convierta en la proyección ortogonal que buscamos. Para ello, imponemos la condición necesaria y suficiente que cumplen dos vectores perpendiculares (producto escalar nulo): $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$.
- Al aplicar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$ llegamos a una ecuación de primer grado donde la incógnita es el parámetro libre k que aparece en las coordenadas del punto arbitrario. Al resolver la ecuación y obtener el valor del parámetro libre, podemos sustituirlo en el punto arbitrario $A(x_A + k \cdot u_x\,, y_A + k \cdot u_y\,,\ z_A + k \cdot u_z\,)$ y así tendremos las coordenadas del punto proyección ortogonal.

La distancia de P a la proyección ortogonal A da como resultado la distancia del punto P a la recta r.

La distancia de un punto $P(x_P, y_P)$ a la recta $r: A\,x + B\,y + C = 0$ también se puede obtener con la expresión:

$$d(P,r) = \left|\frac{A \cdot x_P + B \cdot y_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \rightarrow si\ el\ punto\ P(x_P, y_P)\ es\ el\ origen\ O(0,0) \rightarrow d(O,r) = \left|\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

La **distancia entre rectas paralelas** se razona así: elegimos un punto cualquiera de una de las rectas y aplicamos la fórmula anterior de distancia de ese punto a la otra recta.

Además, la distancia entre dos rectas paralelas se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$d(r,s) = \left|\frac{C_r - C_s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$Siendo\ r: Ax + By + C_r = 0$$

$$Siendo\ s: Ax + By + C_s = 0$$

$$\boldsymbol{IMPORTANTE}: Ambas\ ecuaciones\ generales\ deben\ expresarse\ con\ los\ mismos\ coeficientes\ A\ y\ los\ mismos\ coeficientes\ B.$$

$$Esto\ siempre\ es\ posible\ si\ ambas\ rectas\ son\ paralelas.$$

La **recta mediatriz** de un segmento formado por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ es una **recta que pasa por el punto medio del segmento y cuyo vector director es perpendicular el vector $\overrightarrow{AB}$.**

Dados dos puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ el **punto medio de su segmento** se obtiene como la semisuma de sus componentes:

$$punto\ medio\ M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\,, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

También podemos definir la mediatriz de un segmento formado por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ como **el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (igual distancia) a los extremos del segmento**:

- Si el punto arbitrario de la recta mediatriz es $P(x, y)$, la distancia de ese punto a los extremos del segmento se calcula:

$$d(P,A) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$$

$$d(P,B) = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

- Igualamos distancias (equidistancia):

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

- Si elevamos al cuadrado y simplificamos, llegaremos a la ecuación general de la recta mediatriz.

La fórmula del punto medio $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\,, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ se puede razonar así: Si los extremos son $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$, el punto medio $M(x, y)$ cumple la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Igualando componentes en la ecuación vectorial, podremos obtener fácilmente el valor de las componentes del punto $M(x, y)$.

Con el mismo razonamiento, podemos dividir un segmento en tantas partes iguales como queramos. Por ejemplo, si los extremos son $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ y deseamos dividir el segmento en tres partes iguales, los puntos C y D que cumplen esta condición se obtienen resolviendo sendas ecuaciones vectoriales:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

La expresión para calcular el **ángulo entre dos rectas** es la misma que utilizamos para calcular el ángulo entre sus vectores directores, con el añadido de aplicar valor absoluto porque el ángulo más pequeño que forman dos rectas entre sí se encuentra, por definición, en el intervalo [0º, 90º].

$$Ángulo\ entre\ dos\ rectas: cos(\alpha) = \left|\frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|}\right| = \left|\frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|}\right|$$

$$Siendo\ \alpha \in [0°, 90°]$$

Usando la relación entre los coeficientes A y B de la ecuación general y las componentes del vector director de la recta, el ángulo entre dos rectas también se puede calcular como:

$$Ángulo\ entre\ dos\ rectas: cos(\alpha) = \left|\frac{A_r \cdot A_s + B_r \cdot B_s}{\sqrt{A_r^2 + B_r^2} \cdot \sqrt{A_s^2 + B_s^2}}\right|$$

$$Siendo\ las\ rectas\ r: A_r x + B_r y + C_r = 0\ , s: A_s x + B_s y + C_s = 0$$

$$Siendo\ \alpha \in [0°, 90°]$$

Y con ayuda de la pendiente de cada recta, el ángulo entre dos rectas se obtiene con:

$$Ángulo\ entre\ dos\ rectas: tg(\alpha) = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

$$Siendo\ m_r\ la\ pendiente\ de\ la\ recta\ r\ y\ m_s\ la\ pendiente\ de\ la\ recta\ s$$

$$Siendo\ \alpha \in [0°, 90°]$$

En dos rectas que se cortan podemos calcular dos bisectrices (ya que las rectas se cortan formando cuatro ángulos, que son iguales dos a dos). **Los puntos de una recta bisectriz forman el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a las dos rectas es la misma**:

- Si el punto arbitrario de la recta bisectriz es $P(x, y)$, la distancia de ese punto a las rectas se calcula:

$$d(P, r) = \left|\frac{A_r x + B_r y + C_r}{\sqrt{A_r^2 + B_r^2}}\right|\ ,\ d(P, s) = \left|\frac{A_s x + B_s y + C_s}{\sqrt{A_s^2 + B_s^2}}\right|$$

- Igualamos distancias (equidistancia):

$$\left|\frac{A_r x + B_r y + C_r}{\sqrt{A_r^2 + B_r^2}}\right| = \left|\frac{A_s x + B_s y + C_s}{\sqrt{A_s^2 + B_s^2}}\right|$$

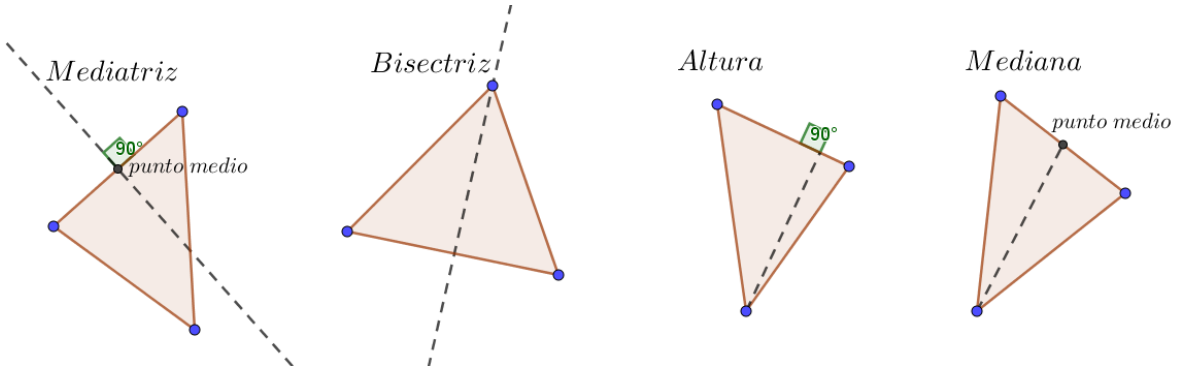
- Eliminamos las barras del valor absoluto, anteponiendo el doble signo $\pm$ en uno de los miembros de la igualdad:

$$\frac{A_r x + B_r y + C_r}{\sqrt{A_r^2 + B_r^2}} = \pm\frac{A_s x + B_s y + C_s}{\sqrt{A_s^2 + B_s^2}}$$

- Con los dos signos, tendremos sendas rectas para las bisectrices.

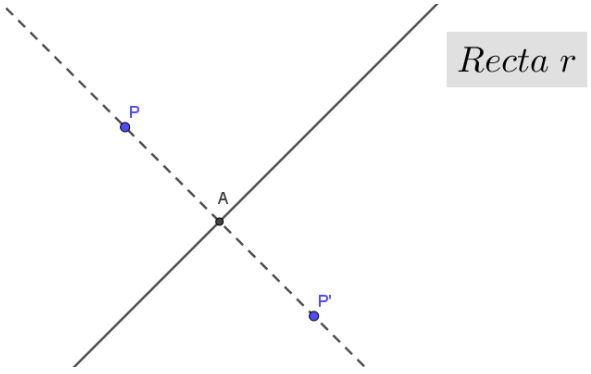
Dado un triángulo de vértices A, B y C se definen los siguientes **puntos notables de un triángulo**:

- Circuncentro. Es el corte de las tres mediatrices de los lados del triángulo. El circuncentro es también el centro de la circunferencia circunscrita.
- Incentro. Es el corte de las tres bisectrices interiores de los ángulo del triángulo. El incentro es también el centro de la circunferencia inscrita. El incentro siempre queda dentro del triángulo.
- Ortocentro. Es el corte de las tres altura del triángulo. Una altura es el segmento que une un vértice de forma perpendicular con el lado opuesto, o con la proyección del lado opuesto.
- Baricentro. Es el corte de las tres medianas del triángulo. Una mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del segmento opuesto. El baricentro siempre queda dentro del triángulo.



Dado un punto P y un punto A, la **simetría central de P respecto de A** es obtener el punto simétrico P' que cumple que A sea el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Si conocemos las coordenadas iniciales de P y las coordenadas iniciales de A, con ayuda de la expresión del punto medio es fácil obtener las coordenadas del punto simétrico P'.

Ya hemos estudiado que la proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r da como resultado un punto A. Ese punto A es el punto medio del segmento formado por P y P', siendo P' el simétrico de P respecto de la recta. Esta simetría se conoce como **simetría axial** (respecto de un eje). Si conocemos las coordenadas del punto P y

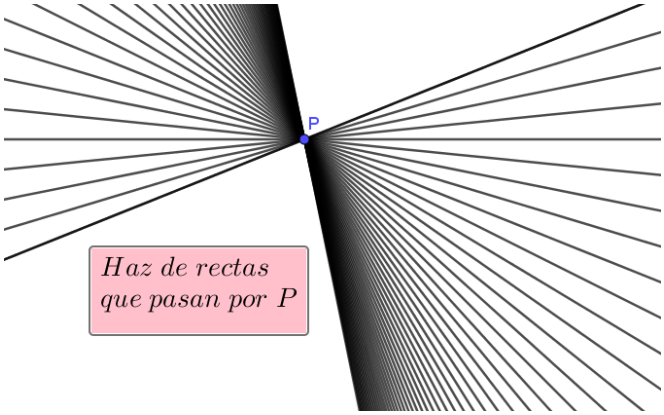


calculamos las coordenadas de la proyección ortogonal A, es fácil obtener las coordenadas del punto simétrico P' con ayuda de la fórmula del punto medio.

Dado un punto $P(x_P, y_P)$ definimos el **haz de recta**s como las infinitas rectas que pasan por el punto P.

Si consideramos la pendiente de la recta como un parámetro real, el haz de rectas se puede expresar como:

$$Haz\ de\ rectas: m = \frac{y - y_P}{x - x_P}\ , siendo\ m \in \mathcal{R}$$



Una **circunferencia** se define como el lugar geométrico de los puntos del plano $P(x, y)$ cuya distancia a un centro fijo $C(x_0, y_0)$ es constante e igual al radio. La **ecuación general de la circunferencia** centrada en el punto $C(x_0, y_0)$ y radio r es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Si desarrollamos los cuadrados, llegamos a la **ecuación desarrollada de la circunferencia**:

$$x^2 - 2x_0x + y^2 - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Si en un problema nos dan la ecuación desarrollada de la circunferencia, comparando términos con la expresión anterior podemos obtener de forma inmediata los valores del centro $C(x_0, y_0)$ y del radio r.

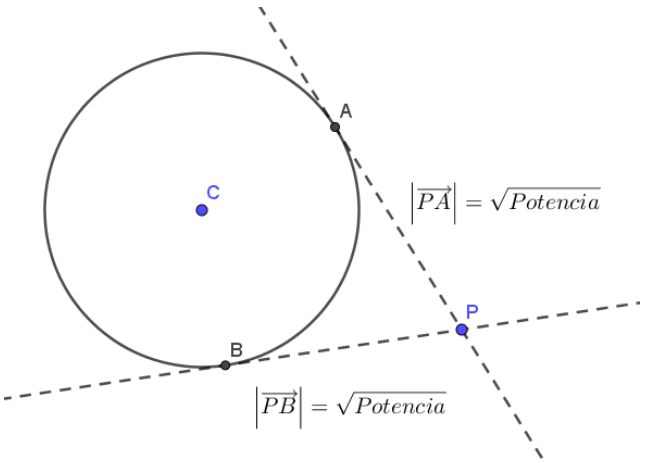
Dado un punto $P(x_P, y_P)$ y una circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r, podemos obtener el vector $\overrightarrow{CP}$ para determinar la **posición relativa del punto respecto de la circunferencia**:

- Si $\left|\overrightarrow{CP}\right| > r$ el punto P es exterior a la circunferencia.
- Si $\left|\overrightarrow{CP}\right| = r$ el punto P se encuentra sobre la circunferencia (punto frontera).
- Si $\left|\overrightarrow{CP}\right| < r$ el punto P es interior a la circunferencia.

La **potencia de un punto $P(x_P, y_P)$ respecto de una circunferencia** de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r se calcula:

$$Potencia = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - r^2$$

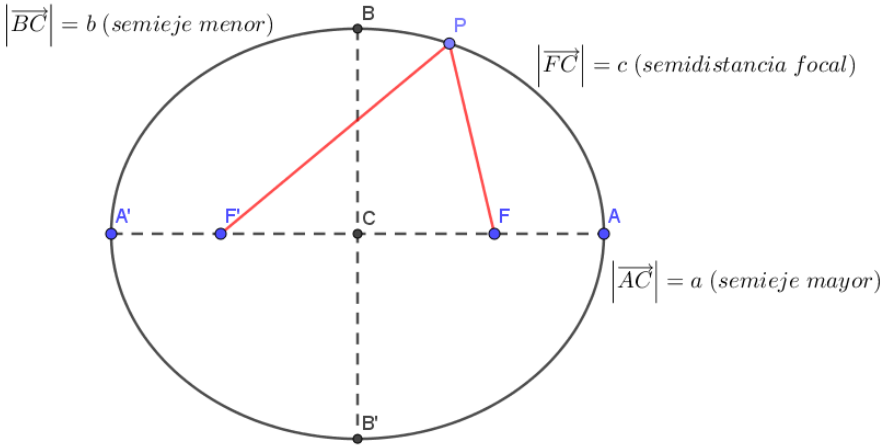
La raíz cuadrada de la potencia da la distancia del punto P al punto de tangencia de las rectas que pasan por P y cortan tangencialmente a la circunferencia.



Dada una recta en forma explícita $r: y = m\,x + n$, podemos estudiar la **posición relativa de una recta respecto de una circunferencia** sustituyendo la ecuación de la recta en la ecuación de la circunferencia. Así llegamos a una ecuación de segundo grado donde:

- Si hay dos soluciones, la recta es secante en dos puntos a la circunferencia.
- Si hay una única solución, la recta es tangente a la circunferencia.
- Si no hay solución, la recta no corta a la circunferencia.

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano $P(x,y)$ cuya suma de distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta suma es igual al eje mayor de la elipse.



$$\left|\overrightarrow{PF}\right| + \left|\overrightarrow{PF'}\right| = 2a\ (eje\ mayor)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

La **ecuación general de la elipse** centrada en el punto $C(x_0, y_0)$, de semieje mayor a y semieje menor b es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

La **excentricidad de una elipse** se define como el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor:

$$Excentricidad: e = \frac{c}{a}$$

$$Siendo\ 0 \leq e \leq 1$$

$$Si\ e = 0\ la\ elipse\ es\ una\ circunferencia$$

$$Si\ e = 1\ la\ elipse\ es\ un\ segmento$$

Dada una recta en forma explícita $r: y = m\,x + n$, podemos estudiar la **posición relativa de una recta respecto de una elipse** sustituyendo la ecuación de la recta en la ecuación de la elipse. Así llegamos a una ecuación de segundo grado donde:

- Si hay dos soluciones, la recta es secante en dos puntos a la elipse.
- Si hay una única solución, la recta es tangente a la elipse.
- Si no hay solución, la recta no corta a la elipse.

RESUMEN TEORÍA TEMA 7: ESTADÍSTICA

En una **variable estadística X de una población de tamaño N**, obtendremos el **valor medio** de la variable con:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i}{N}$$

Siendo x_i los valores concretos que toma la variable estadística X, y siendo n_i las frecuencias absolutas (repeticiones) de cada uno de los valores concretos x_i. La media es un "representante" del conjunto de valores x_i . Pero no significa que la media sea el valor más probable de encontrar dentro de la muestra.

Para determinar lo bien o mal que funciona la media como representante de los valores x_i , debemos estudiar parámetros de dispersión. Por ejemplo, la **varianza**:

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Donde el factor $f_i = \frac{n_i}{N}$ se conoce como frecuencia relativa. La raíz cuadrada de la varianza es la **desviación típica**:

$$\sigma = s = \sqrt{s^2}$$

Cuanto menor sea la desviación típica mejor funcionará la media como representante de los valores x_i . Una desviación típica igual a 0 significa que todos los valores x_i coinciden con el valor medio $\bar{x}$. Y cuanto más grande sea la desviación típica, más alejados están los valores x_i de la media $\bar{x}$.

El coeficiente de variación CV es la división entre la desviación típica y la media, en tanto por ciento.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Al comparar dos poblaciones con medias distintas y desviaciones distintas, diremos que la población que tenga un CV más pequeño tendrá sus valores más próximos a su media que la otra población.

Supongamos un experimento donde se realizan n ensayos idénticos. Cada ensayo es independiente de los demás.

Cada ensayo tiene solo dos resultados posibles: éxito o fracaso. La probabilidad de éxito se denomina p y es constante durante todo el experimento. Por lo tanto, la probabilidad de fracaso será $1 - p$ (aquí la probabilidad viene expresada en tanto por uno). A este tipo de experimentos se les denomina experimento binomial.

Si X es una variable aleatoria discreta que indica el número de éxitos obtenidos en un experimento binomial, diremos que **X es una variable aleatoria binomial** $\boldsymbol{B(n,p)}$.

El valor $\boldsymbol{n}$ **indica el número de ensayos realizados**. El valor $\boldsymbol{p}$ **indica la probabilidad de éxito en cada ensayo**.

La probabilidad de que en n ensayos encontremos k éxitos de la variable discreta binomial X se conoce como **función de probabilidad binomial o función de probabilidad de la distribución binomial**:

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\boldsymbol{donde\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

La función de distribución binomial acumula la probabilidad para valores iguales o inferiores a k éxitos:

$$F(k) = P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k)$$

Media o esperanza matemática para la Binomial $\boldsymbol{B(n,p)}$**:**

$$\mu = n \cdot p$$

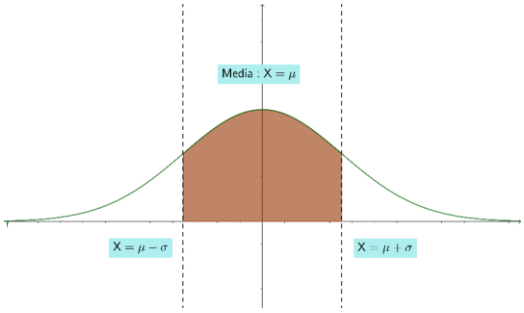
Varianza en la Binomial:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$$

Desviación típica en la Binomial:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$$

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una **distribución normal** $N(\mu,\sigma)$ **de media** μ **y desviación típica** σ si los valores posibles de la variable ocupan toda la recta real (desde $-\infty$ hasta $+\infty$) y la gráfica de la distribución normal toma la forma de la conocida **campana de Gauss**. Esta gráfica es simétrica respecto al valor medio μ (la media coincide con la mediana) y muchas variables aleatorias se pueden aproximar a esta forma (peso de una población, altura de las personas de un curso, etc.).



Existen tablas con los valores acumulados en la gaussiana para diferentes intervalos. Para usar estas tablas necesitamos convertir la distribución $N(\mu,\sigma)$ en una distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $N(0,1)$.

Este proceso se conoce como **tipificar la variable**. ¿Cómo pasar de N(μ, σ) a N(0,1)?

Definiendo una nueva variable aleatoria:

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}\ .$$

En variable continua la probabilidad de que Z tome un valor concreto k es prácticamente 0, debido al gran número de valores posibles para Z (podemos ver la variable continua Z como una variable real que puede tomar infinitos valores decimales). Por eso, en variable continua, la tabla tipificada no da el valor $P(Z = k)$ sino que da el valor acumulado $P(Z \leq k)$ a la izquierda de Z=k.

La distribución binomial (variable discreta), **bajo determinadas condiciones, puede aproximarse a la normal** (variable continua). Esto es una consecuencia del **Teorema central del límite**.

Si el tamaño de la población n es muy grande (superior a 30) y la probabilidad p no se acerca ni a 0 ni a 1, podemos aproximar la variable aleatoria X que sigue una distribución normal B(n,p) a una variable continua X que sigue una distribución normal $N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})$.

Esta aproximación es válida si:

$$n \cdot p \geq 5$$
$$n \cdot (1-p) \geq 5$$

Un **muestreo aleatorio simple** significa que los n individuos de la muestra se eligen al azar, con reemplazamiento. De esta forma, todos los individuos tienen la misma probabilidad de ser elegidos, independientemente de qué individuo se elija el primero o el último.

Un **muestreo estratificado** ocurre cuando los N individuos de la población se organizan en diversos grupos (o estratos) A_1, A_2, A_3, … , A_k. En cada estrato contamos con N_1, N_2, N_3, … , N_k individuos. De tal forma que se cumple:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_k$$

Si elegimos de la población de tamaño N una muestra de tamaño n, el número de individuos n_1, n_2, n_3, … , n_k de cada estrato dentro de la muestra se deben elegir de manera proporcional. Es decir:

$$\frac{N}{n} = \frac{N_1}{n_1} = \frac{N_2}{n_2} = \frac{N_3}{n_3} = \ldots = \frac{N_k}{n_k}$$

Sea una población de la que sabemos que un estadístico tiene una media μ y una desviación típica σ. Por ejemplo: la altura de todos los españoles. Elijamos muestras de tamaño n (por ejemplo, muestras de 2.000 españoles sobre los que estudiar su altura). Cada muestra tendrá su correspondiente media y su correspondiente desviación. La media de las medias de todas las muestras se llama media muestral $\mu_{\bar{X}}$. Y desviación del conjunto de datos formado por las medias de todas las muestras se llama desviación muestral $\sigma_{\bar{X}}$.

¿Qué relación hay entre la media muestral y la media de la población? ¿Y entre la desviación muestral y la desviación de la población?

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es decir: **la media muestral coincide con la media de la población. La desviación muestral coincide con la desviación de la población dividida por la raíz cuadrada del tamaño de las muestras.** Cuando mayor sea el tamaño de la muestra n, menor será el grado de dispersión de la media muestral.

Si el muestreo ha sido aleatorio simple y la población de partida sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$, o bien el tamaño de la muestra es suficientemente grande ($n \geq 30$), podemos afirmar que la distribución muestral de medias sigue también una distribución normal $N(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}})$.

Imagina una población con variable aleatoria que sigue una distribución binomial y sabemos la proporción p (porcentaje) de esa población que cumple con éxito el experimento aleatorio. Tomamos muestras de tamaño n. Cada muestra tendrá su correspondiente porcentaje de éxito.

Se demuestra que **la media de los porcentajes de éxito en muestras de tamaño n (distribución muestral de proporciones) sigue una distribución normal con las condiciones siguientes**:

- La media de la distribución normal es igual al valor p de la proporción de la población:

$$\mu_{\bar{p}} = p$$

- La desviación típica de la distribución normal se aproxima a:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Esta aproximación a $N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right)$ es mejor cuanto mayor sea el tamaño de n y cuanto más cerca esté la proporción p del factor 0,5. Nuevamente esta aproximación es válida si:

$$n \cdot p \geq 5 \quad \text{y} \quad n \cdot (1-p) \geq 5$$

Hasta ahora hemos obtenido información de los parámetros de una muestra a partir de los datos de los parámetros de la población. ¿Sería posible invertir el proceso? Es decir, inferir desde la muestra (caso particular) información relevante sobre la población (caso general).

A esto se dedica la **inferencia matemática**. Por ejemplo: obtener la media de una población a partir de la media y la desviación de una muestra. O bien la proporción de una población a partir de la proporción y la desviación de una muestra.

Si el resultado de nuestro razonamiento nos da un valor concreto, hablaremos de estimación puntual. Y si nos da un intervalo donde encontrar ese valor con un porcentaje concreto de fiabilidad, hablaremos de estimación por intervalo de confianza.

Vamos a centrarnos en esto último, en los intervalos de confianza.

Llamaremos $\boldsymbol{\alpha}$ **al riesgo** de no encontrar el valor deseado dentro de nuestro intervalo de confianza. Por lo tanto, el factor $\boldsymbol{1-\alpha}$ **será el nivel de confianza** de encontrar el valor dentro de nuestro intervalo.

De esta forma, la probabilidad de que el valor que estamos estimando se encuentre dentro de un intervalo (a,b) será:

$$P(a \leq parámetro \leq b) = 1-\alpha$$

Al valor de α también se le denomina nivel de significación.

Si el parámetro a estimar de la población sigue una distribución normal y deseamos aglutinar alrededor de su valor medio el $(1-\alpha)\%$ por ciento de las observaciones, significa que dejaremos a un lado y a otro del intervalo (a,b) un $(\alpha/2)\%$ de observaciones (la suma de $\alpha/2$ más $\alpha/2$ da lugar al valor total α).

¿Qué casos vamos a estudiar para aplicar la estimación por intervalo?

- Intervalo de confianza para obtener la media población, conocida la media de la muestra, el tamaño de la muestra y la desviación de la población.
- Intervalo de confianza para la proporción poblacional, conocida la proporción de la muestra y el tamaño de la muestra.

Hemos visto que la distribución muestral de medias sigue una distribución normal $N(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Donde μ es la media de la población, σ es la desviación de la población y n es el tamaño de la muestra. Si tipificamos esta distribución normal, el intervalo de confianza para encontrar la media poblacional con un nivel de confianza $(1-\alpha)\%$ a partir de una muestra de tamaño n y media muestral $\bar{x}$, será:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $\boldsymbol{Z_{\alpha/2}}$ **es el valor de la variable que deja a la derecha un porcentaje de observaciones igual a** $\boldsymbol{\alpha/2}$.

De igual forma, la distribución muestral de proporciones sigue una distribución normal $N(\mu_{\bar{p}}, \sigma_{\bar{p}}) = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Donde p es la proporción de la población y n es el tamaño de la muestra. Si tipificamos esta distribución normal, el intervalo de confianza para encontrar la proporción poblacional con un nivel de confianza $(1-\alpha)\%$ a partir de una muestra de tamaño n y proporción muestral $\bar{p}$, será:

$$\left(\bar{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\cdot(1-\bar{p})}{n}}, \bar{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\cdot(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

El error máximo que se puede cometer en estos intervalos es la semianchura del intervalo de confianza. Es decir:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\cdot(1-\bar{p})}{n}}$$

Si el error máximo (E) es un valor prefijado, podemos preguntarnos por el tamaño mínimo de la muestra que garantiza no superar ese error máximo:

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \bar{p}\cdot(1-\bar{p})\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2$$

RESUMEN TEORÍA TEMA 8: FUNCIONES Y LÍMITE

Una **función de variable real $f(x)$ necesita de un dominio de definición**, que son los valores de la variable real x que pueden ser sustituidos en la ecuación de la función.

- El dominio de un polinomio es toda la recta real.
- El dominio de un cociente de polinomios es toda la recta real menos los valores que anulan al denominador.
- El dominio de un producto de funciones $f(x) \cdot g(x)$ es la intersección de los dominios de cada función: $Dom(f) \cap Dom(g)$.
- El dominio de un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la intersección de los dominios de cada función menos los valores que anulan al denominador: $Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in \mathcal{R} \,/\, g(x) = 0\}$
- El dominio de la raíz cuadrada de una función $\sqrt{f(x)}$ implica resolver la inecuación $f(x) \geq 0$.
- El dominio del logaritmo de una función $\ln[f(x)]$ implica resolver la inecuación $f(x) > 0$.

Una función es continua en su dominio si podemos dibujar la gráfica de la función sin levantar la mano del papel.

La imagen de una función coincide con el dominio de la inversa. Y el dominio de una función coincide con la imagen de la inversa.

$$Dom(f(x)) = Im(f^{-1}(x))$$
$$Im(f(x)) = Dom(f^{-1}(x))$$

No todas las funciones admiten inversa. En 2ºBachillerato estudiaremos las condiciones a cumplir para que exista inversa. Pero ahora, en 1ºBachillerato, sí podemos decir que si existe la inversa, se cumple la siguiente igualdad en la composición de funciones: $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$.

La gráfica de una función y la gráfica de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante).

Ejemplos de funciones inversas entre sí son el logaritmo y la exponencial, el seno y el arcoseno, el coseno y el arcocoseno, la tangente y la arcotangente, o la parábola y la raíz cuadrada.

Si existe la inversa, podemos calcular su ecuación con el siguiente razonamiento:

- Llamamos y a $f(x)$.
- De la ecuación de la función, despejamos la variable x .
- Realizamos el cambio siguiente: y pasa a llamarse x, mientras que x pasa a llamarse y.
- La nueva expresión obtenida para y será la función inversa $f^{-1}(x)$.

Preguntarnos por **el límite de la función $f(x)$ cuando el valor de la variable x se acerca a x_0 significa conocer el valor de la imagen de la función al que tendemos conforme nos acercamos más y más (sin llegar a alcanzar) al valor x_0**.

$$\boldsymbol{L = \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Este acercamiento puede ser por la derecha (límite lateral derecho) o por la izquierda (límite lateral izquierdo) de x_0.

$$L^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
$$L^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

¿Cómo calcular un límite?

Lo más práctico es **evaluar $x = x_0$** en la ecuación de la función. Si el resultado es un número real, hemos terminado y ese número real es el valor del límite.

Pero si obtenemos una **indeterminación**, deberemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

En **límites sobre cociente de polinomios, o con raíces cuadradas de polinomios**, encontraremos los siguientes **tipos de indeterminaciones**:

- **Indeterminación $\frac{k}{0}$** siendo k un valor real no nulo: No estamos dividiendo por 0, sino que el denominador "se acerca" a 0 tanto como queramos (sin llegar a ser nunca 0). En este caso, tendremos que calcular los límites laterales, que se dispararán a más o a menos infinito.
- **Indeterminación $\frac{0}{0}$** : En cociente de polinomios, factorizamos, simplificamos y evaluamos para resolver la indeterminación. Si aparecen raíces de polinomios, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la parte de la fracción que contiene a la raíz. Y tras aplicar el conjugado, tendremos que simplificar y evaluar.
- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$** : En cociente de polinomios, dividiremos por la máxima potencia de la variable. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces de polinomios, debemos tener en cuenta que, por ejemplo, la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2, en el infinito, se comporta como un polinomio de grado 1. Ya que, en el infinito, el comportamiento de un polinomio lo marca el término con el mayor grado (y la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2 se aproxima a un polinomio de grado 1 cuando x tiende a infinito).
- **Indeterminación $\infty - \infty$** : En fracciones de polinomios, aplicamos m.c.m. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces cuadradas, podemos multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión que contiene a la raíz. Para después, simplificar y volver a evaluar.

En límites cuando $x \to -\infty$ es bastante práctico cambiar en el límite $-\infty$ por $+\infty$ y cambiar en la función x por $-x$. Tras este cambio, resolvemos el límite en $+\infty$ con las técnicas que estamos estudiando.

Para conocer la **continuidad de una función en un punto concreto x_0 del dominio**, como puede ser el punto frontera en una función definida a trozos, aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto:

- $\exists f(x_0)$
- $L^+ = L^- = L \epsilon \mathcal{R}$
- $f(x_0) = L$

Tipos de discontinuidad:

- Si $L^+ = L^- = L \epsilon \mathcal{R}$, pero NO se cumple $f(x_0) = L$, tendremos una **discontinuidad evitable**. En este caso puede ocurrir que no esté definido el valor $f(x_0)$.
- Si los límites laterales existen, son finitos, pero NO se cumple $L^+ = L^-$, tendremos una **discontinuidad no evitable de salto finito**.
- Si los límites laterales existen, y al menos uno de los dos se dispara a infinito (da igual si es $+\infty$ o $-\infty$), tendremos una **discontinuidad no evitable de salto infinito**.

Los candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos que definen al dominio. Deberemos estudiar los límites laterales y comprobar si al menos uno de ellos se dispara a más o a menos infinito. La A.V. es una recta vertical $x = x_0$ que no es atravesada por la función.

La **A.H.** estudia el comportamiento de la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.H. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.H. en $x \to -\infty$. La A.H. es una recta horizontal $y = k$ que cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = k \in \mathcal{R}$.

La **A.O.** es una recta con pendiente no nula a la que tiende la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.O. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.O. en $x \to -\infty$. La A.O. es una recta $y = m\,x + n$ donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - m\,x]$$

En cociente de polinomios, si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, tendremos A.H.

En cociente de polinomios, si el grado del numerador supera en 1 unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

En un resumen como este documento, no hay espacio para mostrar las gráficas de las funciones elementales más usuales en bachillerato (seno, exponencial, parábola, etc.). Pero si dejo enlace a un **conjunto de gráficas que es muy recomendable memorizar**:

https://www.geogebra.org/m/rscebhak#material/w9ehemkc (1ºBach - Tema 8 – Apartado 1 de Funciones)

Si existe A.H. en $x \to +\infty$, seguro que no habrá A.O. en $x \to +\infty$. Y viceversa.

Si existe A.H. en $x \to -\infty$, seguro que no habrá A.O. en $x \to -\infty$. Y viceversa.

Si una función está definida en el dominio cerrado $[a, b]$ o abierto (a, b) no tiene sentido preguntarse por el límite lateral a la izquierda de a ni por el límite lateral a la derecha de b, porque la función no está ahí definida. No confundir el concepto de función no definida con el concepto de que un límite se dispare a infinito: son dos ideas distintas. Por ejemplo:

- $f(x) = \ln(x)$ no está definida en $x = 0$ porque no existe el valor de $ln(0)$.
- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ porque la gráfica de la función logaritmo se hunde a menos infinito a la derecha de $x = 0$.

En cociente de polinomios, si existe A.H. o A.O. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.H. o A.O. en $x \to -\infty$. ¡Ojo! Si no es un cociente de polinomios, hay que estudiar por separado la A.H. o A.O. tanto en $x \to +\infty$ como en $x \to -\infty$.

Una función $f(x)$ puede cortar a su A.H. o A.O. Para calcular los puntos de corte, igualamos la ecuación de la función con la ecuación de la asíntota.

RESUMEN TEORÍA TEMA 9: DERIVADAS

La **Tasa de Variación Media (TVM) en un intervalo** $[a,b]$ se define para una función $f(x)$ continua en ese intervalo:

$$TVM = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La TVM relaciona el incremento de la imagen de una función (numerador $f(b)-f(a)$) con el incremento de la variable independiente (denominador $b-a$).

El concepto de derivada se define a partir del concepto de TVM, cuando la anchura del intervalo $[a,b]$ tiende a 0.

La **derivada es una medida del crecimiento de una función**. Derivada positiva en un punto, implica que la función es estrictamente creciente en ese punto. Derivada negativa en un punto, significa que la función es estrictamente decreciente:

- $f'(x_0)>0 \rightarrow$ función estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0)<0 \rightarrow$ función estrictamente decreciente en x_0
- $f'(x_0)=0 \rightarrow$ **punto crítico** en x_0 (puede ser máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión)

La **definición formal de derivada mediante límite** es:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}[f(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

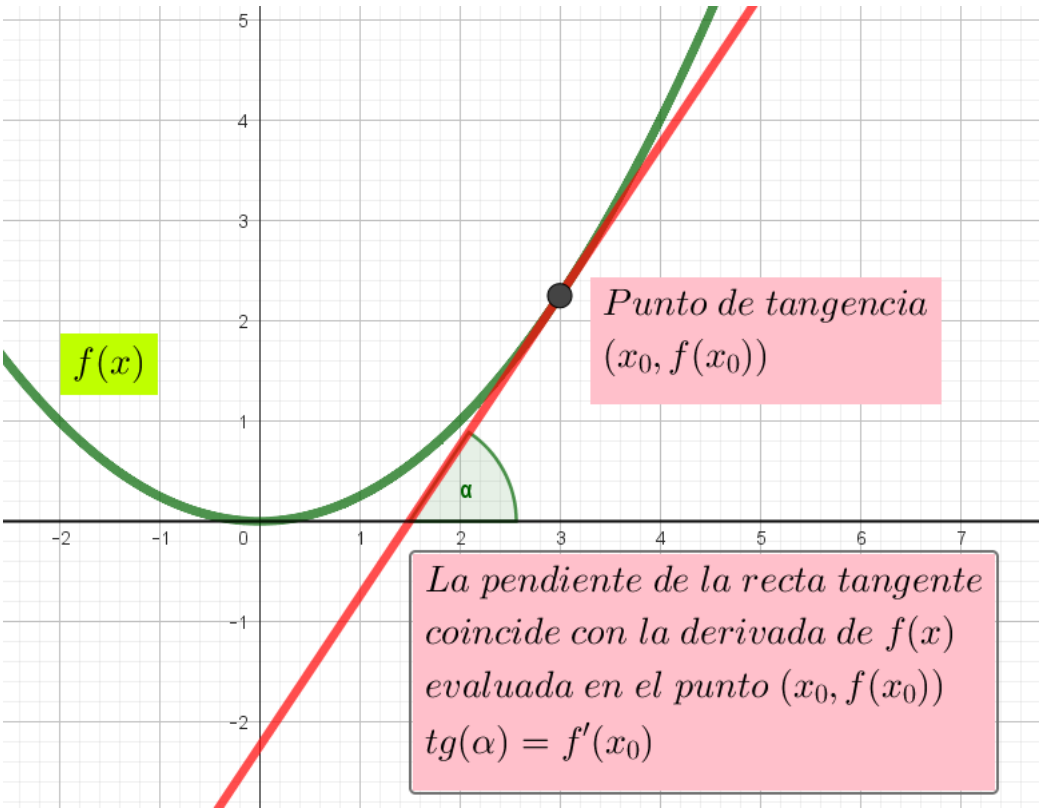
En un resumen como este, por cuestiones de espacio, no vamos a escribir la tabla completa de derivadas elementales. Pero sí dejo indicado el enlace para descargarla en formato PDF:

https://www.geogebra.org/m/xfea83tw#material/ngehctwq (1º Bach – Tema 9 – Apartado 3 – PDF de Teoría)

Aprender a derivar sin error es de vital importancia. Por lo que recomiendo vivamente imprimir esta tabla de derivada, estudiarla y tenerla a mano en clase para consultarla cada vez que tengamos que derivar. Con el tiempo y la práctica, terminaremos aprendiéndola.

El valor de la derivada evaluada en un punto x_0 coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x_0 . Es decir:

$$m_{tangente}=f'(x_0)$$



Los puntos críticos son los puntos que anulan la primera derivada. Esta condición también se conoce como **condición necesaria de extremo relativo**:

$$x_0 \text{ es un punto crítico si } f'(x_0)=0 \text{ (condición necesaria de extremo relativo)}$$

Los puntos críticos pueden ser:

- Máximos relativos (suaves)
- Mínimos relativos (suaves)
- Puntos de inflexión

Para discriminar si un punto crítico es un extremo relativo, aplicamos la condición suficiente de extremo relativo.

Hay dos formas de aplicar a un punto crítico la condición suficiente de extremo relativo:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos críticos. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la primera derivada. Si hay cambio de signo en la derivada a la izquierda y a la derecha de un punto crítico, tendremos un extremo relativo.
    - Cambio de derivada positiva a derivada negativa, indica un máximo relativo (paso de creciente a decreciente).
    - Cambio de derivada negativa a derivada positiva, indica un mínimo relativo (paso de decreciente a creciente).
    - Si no hay cambio de signo en la derivada, es un punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la segunda derivada y evaluarla en el punto crítico (forma recomendada para polinomios, porque son muy fáciles de derivar).
    - Segunda derivada negativa en el punto crítico, indica un máximo relativo.
    - Segunda derivada positiva en el punto crítico, indica un mínimo relativo.
    - Segunda derivada nula en el punto crítico, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

La **segunda derivada es una medida de la curvatura** (**concavidad o convexidad**) de una función:

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ función convexa $\cup$ en x_0
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ función cóncava $\cap$ en x_0
- $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ **candidato a punto de inflexión** en x_0 (no todos los puntos de inflexión son puntos críticos)

La condición necesaria de punto de inflexión es anular la segunda derivada:

$$x_0 \ es \ un \ \ candidato \ a \ punto \ de \ inflexión \ si \ f''(x_0) = 0 \ (condición \ necesaria \ de \ punto \ de \ inflexión)$$

También **existen dos formas de aplicar a un candidato a punto de inflexión la condición suficiente de punto de inflexión**:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos candidatos a puntos de inflexión. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la segunda derivada. Si hay cambio de signo en la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de un punto candidato, tendremos un punto de inflexión.
    - Cambio de segunda derivada positiva a segunda derivada negativa, indica un punto de inflexión (paso de convexa a cóncava).
    - Cambio de segunda derivada negativa a segunda derivada positiva, indica un punto de inflexión (paso de cóncava a convexa).
    - Si no hay cambio de signo en la segunda derivada, no hay punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la tercera derivada y evaluarla en el candidato a punto de inflexión (forma recomendada para polinomios, por ser fáciles de derivar).
    - Tercera derivada negativa en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de convexa a cóncava.
    - Tercera derivada positiva en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de cóncava a convexa.
    - Tercera derivada nula en el candidato, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

De la **gráfica de la función derivada** podemos obtener información de la gráfica de la función original:

- Los cortes x_0 de la gráfica de la derivada con el eje horizontal son los puntos críticos de $f(x)$.
    - Si el corte atraviesa al eje de abscisas de arriba abajo, tendremos un máximo relativo en x_0.
    - Si el corte atraviesa al eje de abscisas de abajo arriba, tendremos un mínimo relativo en x_0.
    - Si el corte no atraviesa al eje de abscisas, tendremos un punto de inflexión.
- Los extremos relativos de la gráfica de la derivada son los puntos de inflexión de $f(x)$.

La expresión "pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0" es sinónima de "valor de la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0". Es decir:

$$m_t = f'(x_0)$$

Por lo tanto, si deseamos **optimizar la pendiente de la recta tangente es lo mismo que optimizar la función derivada**. Es decir, los máximos y los mínimos de la pendiente de la recta tangente son los máximos y los mínimos de la función derivada. Conclusión: los máximos y los mínimos de la pendiente de la recta tangente son los puntos de inflexión de la función original $f(x)$.

Un máximo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más grande de todas.

Un mínimo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más pequeña de todas.

Para obtener los extremos absolutos de una función en toda la recta real o en un dominio formado por un intervalo abierto, tendremos que hacer un boceto de la gráfica en el dominio que nos han dado. Pero si nos piden **estudiar los extremos absolutos en un intervalo cerrado** $[a,b]$, podemos razonar así:

- Calcular los extremos relativos (condición necesaria y condición suficiente).
- Obtener la imagen de los extremos relativos, la imagen de $x=a$ y la imagen de $x=b$.
- Decidir los extremos absolutos comparando el valor de estas imágenes calculadas.

Regla de L'Hôpital: en límites $L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ con indeterminación $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, si existe el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ coincide con el límite de partida L.

- Si tras aplicar L'Hôpital dos veces de forma consecutiva, volvemos al límite de partida, significa que nuestro límite no puede ser resuelto con esta regla. Por ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

En indeterminaciones $0\cdot\infty$ buscamos convertir el límite en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital. Para ello, convertimos el límite en un cociente de funciones.

- Un ejemplo de cómo conseguir un cociente dentro de un límite, lo tenemos en $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)=0\cdot(-\infty)$. Si expresamos x como $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ tendremos $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}$ y podremos aplicar L'Hôpital.

En indeterminaciones 0^0 , ∞^0 y 1^∞ razonamos de la siguiente manera:

- Aplicamos logaritmo neperiano a nuestro límite L de partida.
- Aplicamos la propiedad $\ln(a^b)=b\cdot\ln(a)$ para conseguir un producto dentro del límite.
- Resolvemos el nuevo límite que hemos obtenido.
- Al resultado final, le aplicamos exponencial (función inversa del logaritmo). Así tendremos el valor del límite de partida L.

Una **función es derivable en un punto x_0 del dominio si la función es continua y suave en ese punto**. Las tres condiciones de continuidad en un punto ya las hemos repasado. **La condición de suavidad en un punto** (por ejemplo, en el punto frontera de una función a trozos) **es que las derivadas laterales sean iguales**:

$$f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$$

$$f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)$$

$$f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$$

Si al calcular una derivada lateral obtenemos una indeterminación, no olvidemos que estamos ante un límite sobre la función derivada. Por lo que podemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

En los **problemas de optimización** encontramos un enunciado del cual debemos obtener información para conseguir una función suave de una sola variable, que tendemos que optimizar (**encontrar el valor del dominio que genera la imagen más grande o la imagen más pequeña**). Debemos estudiar el dominio y buscar los extremos relativos de esa función.

Con frecuencia, en estos problemas de optimización aparece un único extremo relativo, por lo que es fácil razonar así: si solo aparece un extremo relativo en el dominio, ese extremo también será absoluto.

Cada ejercicio de optimización "es de su padre y de su madre", por lo tanto debemos practicar mucho para estar preparados ante cualquier tipo de ejercicio que nos podamos encontrar en el examen. En el siguiente enlace tienes una buena batería de problemas de optimización resueltos para practicar:

https://www.geogebra.org/m/xfea83tw#material/pcug8qma (1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – PDF de Problemas)

El **estudio completo de una función** incluye: dominio, corte con los ejes, simetría, asíntotas, monotonía y extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión, dibujo de la gráfica.

Salvo funciones sencillas (polinomios de grados dos o grado tres, cociente de polinomios de grado uno o dos, etc.) no es común que en un examen nos pidan el estudio completo de una función por ser un proceso largo en el tiempo. Pero sí nos pueden pedir parte de este estudio completo.

En el siguiente enlace tienes un buen número de ejercicios resueltos, paso a paso, sobre el estudio completo de funciones. Es buena idea que le eches un ojo:

https://www.geogebra.org/m/xfea83tw#material/xzt4fsuv (1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – PDF de Problemas)

Sea una función $f(x)$. A toda función $F(x)$ cuya derivada coincida con $f(x)$ se le denomina primitiva de $f(x)$. Es decir:

$$F'(x)=\frac{d[F(x)]}{dx}=f(x)$$

Como la derivada de una constante real vale 0, tendremos **infinitas primitivas** que cumplen que su derivada coincida con la función $f(x)$.

$$\frac{d[F(x)+C]}{dx}=f(x)$$

$$Siendo\ C\epsilon\mathcal{R}$$

Definimos un proceso inverso al de la derivada, que llamaremos integral indefinida (también se le conoce como "antiderivada"). Y razonamos así: **si la derivada de $F(x)$ coincide con $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ coincide con $F(x)$.**

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Hablamos de integral "indefinida" por la **constante C** que antes hemos mencionado: **hay infinitas funciones resultantes de una integral indefinida porque la derivada de una constante vale 0**.

Las integrales más sencillas son las integrales inmediatas. Se resuelven leyendo la tabla de derivadas de derecha a izquierda. Por ejemplo:

$$Si\ la\ derivada\ de\ f(x) = x^2\ es\ f'(x) = 2x$$

$$La\ integral\ de\ 2x\ es \int 2x\,dx = x^2 + C$$

Las integrales cumplen las condiciones de linealidad:

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \rightarrow la\ integral\ de\ la\ suma\ es\ la\ suma\ de\ las\ integrales$
- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \rightarrow la\ integral\ de\ un\ número\ por\ una\ función\ es\ el\ número\ por\ la\ integral\ de\ la\ función$

Con una condición de contorno podemos determinar, de manera única, el valor de la constante de integración. Por ejemplo:

$$Obtener\ la\ primitiva\ de\ 2x\ que\ pase\ por\ el\ punto\ (1{,}0)$$

$$F(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$Si\ (1{,}0)\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ F(x) \rightarrow F(1) = 0 \rightarrow 1^2 + C = 0 \rightarrow C = -1$$

$$Solución\ que\ cumple\ la\ condición\ de\ contorno: F(x) = x^2 - 1$$

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 1: REPASO DE 4ºESO

1.1. Resuelve $\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{7x+1}{x^2-1}$. Ayuda: No olvides comprobar que los candidatos a solución no anulen los denominadores de partida.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

1.2. Simplifica sacando factor común y utilizando un binomio de Newton: $\frac{x^4-y^4}{3x^3y-3xy^3}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

1.3. Opera y simplifica: $(a+b)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

1.4. Opera y simplifica: $\left(\frac{1-x}{3x-x^2}-\frac{x-1}{x^2-2x-3}\right)\cdot\frac{x^2+x}{x-1}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 4)

1.5. Opera y simplifica: $\frac{3+a}{1+a}-\frac{1+a}{a-1}-\frac{2+a+a^2}{1-a^2}$. Ayuda: el binomio a^2-1 es el opuesto del binomio $1-a^2$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 8)

1.6. Responde de manera razonada:

a) El conjunto A está formado por todos los números naturales pares del 1 al 10. El conjunto B está formado por todos los números naturales múltiplos de 3 del 1 al 10. ¿Quiénes forman la unión del conjunto A y el conjunto B? ¿Y la intersección?

b) El conjunto A está formado por todos los números reales del 1 al 10. El conjunto B está formado por todos los números reales del 2 al 5, sin incluir al 5. ¿Quiénes forman la unión del conjunto A y el conjunto B? ¿Y la intersección?

c) Sean los conjuntos de números reales $A=[2,5]$, $B=[2,5]-\{3\}$, $C=(2,5)$ y $D=[2,3)\cup(3,5)$. Haz la unión y la intersección de todas las parejas de conjuntos. Ayuda: la unión y la intersección son conmutativas, por lo tanto si haces $A\cap B$ el resultado es idéntico a $B\cap A$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

1.7. Factoriza el polinomio $P(x)=6x^4-x^3-22x^2+11x+6$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

1.8. Calcula las raíces de la ecuación $12x^4-5x^3-\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{3}=0$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

1.9. Dada la función $g(x)=x^3+2x^2-x-2$ calcula los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas. Ayuda: El eje horizontal (abscisas) viene representado por la recta horizontal $y=0$. Mientras que el eje vertical (ordenadas) viene representado por la recta vertical $x=0$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 8)

1.10. Escribe la ecuación de una parábola que pase por los puntos $(0,4)$, $(3,-2)$ y $(5,4)$. Representarla.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

1.11. Encontrar la ecuación de la parábola que pase por el punto $(1,2)$ y cuyo vértice sea el punto $(7,0)$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

1.12. Obtener los puntos de corte de las parábolas $f(x)=2x^2-4$ y $g(x)=-x^2+8$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

1.13. Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1}-\frac{2x-1}{1+x}=3$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

1.14. Halla los valores de m para que la ecuación $(m+1)x^2-(2m+5)x+6=0$ tenga dos raíces positivas, una el triple de la inversa de la otra.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

1.15. Calcula las raíces de $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}-2$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 3)

1.16. Resuelve la ecuación $34-x^2=\frac{225}{x^2}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 4)

1.17. Calcula las raíces de $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 5)

1.18. Halla los valores de m para que la ecuación $x^2-(2m+1)x+(3m+1)=0$ tenga una raíz 3 unidades superior que la otra. Calcula las raíces de dicha ecuación.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 6)

1.19. Resuelve $\sqrt{4x+9}+\sqrt{x-6}=\sqrt{8x+1}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 9)

1.20. Resuelve $\frac{2x}{x-3}-\frac{x+5}{x+3}-\frac{2x-7}{9-x^2}=0$. Recuerda que el binomio $9-x^2$ es el opuesto de x^2-9.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 10)

1.21. Resuelve $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+8}-1}=\frac{5}{3(\sqrt{x+1}+2)}$. Ayuda: Los candidatos a solución, en primer lugar, no deben hacer negativos a los discriminantes. Tampoco pueden anular los denominadores de partida. Y además, deben cumplir la igualdad inicial.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 11)

1.22. Encuentra una ecuación bicuadrática cuyas raíces sean:

a) $2,-2,3,\frac{1}{3}$

b) $1,2$

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 17)

1.23. Halla los valores de x e y que verifican $\begin{cases}2x+y=-1\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{-1}{15}\end{cases}$. Como siempre, al obtener los candidatos a solución, comprueba que no se anulan ninguno de los denominadores de las ecuaciones de partida que forman el sistema.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

1.24. Resuelve $\begin{cases}x^2-y^2=\frac{143}{9}\\ (x-y)^2=\frac{121}{9}\end{cases}$. Ayuda: Cuando aparece el cuadrado de un término menos el cuadrado de otro término, puede ser buena idea usar alguna de las identidades notables que hemos estudiado. Además, cuando tienes dos ecuaciones en un sistema, recuerda que puedes dividir entre sí ambas ecuaciones para obtener una nueva relación (siempre y cuando el denominador nunca sea igual a cero).

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

1.25. Resuelve $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{2+y}=2\\ \frac{x}{3}+2y=1\end{cases}$. Ayuda: Cuando obtengas los candidatos a solución, no olvides comprobar que no hacen negativo a ninguno de los discriminantes. Y además, que cumplen las igualdades de partida.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 5)

1.26. Resuelve el sistema por el método que quieras: $\begin{cases}x+y-2z=9\\ 2x-y+6z=-1\\ 2x-y+4z=4\end{cases}$. Puedes aplicar igualación, reducción, sustitución o Gauss (que no es más que aplicar reducción varias veces seguidas hasta conseguir despejar, una a una, cada incógnita).

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 7)

1.27. Resuelve $\frac{x}{3}-\frac{5x-2}{2}\leq x-\frac{2-5x}{6}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

1.28. Resuelve $\frac{x-1}{x+1}<\frac{x+1}{x-1}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 3)

1.29. Resuelve $\begin{cases}6x^4+7x^3-12x^2-3x+2\leq 0\\ \frac{1}{x-2}+1\leq\frac{3}{4-x^2}\end{cases}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 4)

1.30. Resuelve $\frac{-3x^2+6x-3}{x^2-9}<0$

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 6)

1.31. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones de dos incógnitas. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l}5x+y\geq 5\\ 3x-2y\leq 4\\ \frac{x}{2}-y>0\end{array}\right\}$$

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 8a – Ejercicio 1)

1.32. Resuelve $\begin{cases}x+2y-1\geq 0\\ x-3y-6>0\\ x+y\leq 5\end{cases}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 8a – Ejercicio 2)

1.33. Resuelve:

a) $|x-3|=5$ b) $2x+|x^2-9|=15$ c) $|\frac{x}{x+2}|=x-4$

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 9 – Ejercicios del 1 al 3)

1.34. Resuelve $|5x-3|<6$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 9 – Ejercicio 6)

1.35. Considera las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$. Calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 9 – Ejercicio 9)

1.36. Representa gráficamente $y = |2x - 3| + |x - 1|$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

1.37. Representa gráficamente $f(x) = |x^2 - 1|$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

1.38. Representa gráficamente la función $f(x) = 2^x$ y la gráfica de su inversa. Además, calcula el valor de $f[f^{-1}(4)]$ y de $f^{-1}[f(1/3)]$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 11 – Ejercicio 1)

1.39. Resuelve $\begin{cases} y - x = 3 \\ 5^x + 5^y = \frac{126}{5} \end{cases}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

1.40. Resuelve:

a) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

b) $3^{2x} = \sqrt{4^{x-1}}$

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicios 2b y 3b)

1.41. Resuelve $\begin{cases} \log(x) + \log(y+3) = \log(6) \\ log\left(\frac{x+7}{y+2}\right) = 1 \end{cases}$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 5)

1.42. Dibuja las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2$ y $h(x) = (x-3)^2$.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 1)

1.43. Un ciclista recorrió 120 Km a la ida. A la vuelta, llevando una velocidad media de 10 Km/h más respecto de la ida, tardó dos horas menos. ¿Qué tiempo empleó en realizar todo el recorrido y cuál fue la velocidad media del viaje de ida? Por simplicidad, asumimos movimiento con velocidad constante tanto a la ida como a la vuelta.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 4)

1.44. Obtener un número de tres cifras sabiendo que la suma de los cuadrados de sus cifras es de 126, que la cifra de las unidades es un tercio de la cifra de las centenas, y que el cuadrado de la cifra de las decenas es igual al producto de las cifras de centenas y unidades más nueve.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 5)

1.45. Un campesino tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15 bueyes el pienso duraría tres días más y si comprase 25 bueyes el pienso duraría tres días menos. Halla el número de bueyes y el número de días que los puede alimentar.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 8)

1.46. Mensualmente los socios de una peña quinielística juegan 520 €. Si hubiera siete socios más, aportarían 14 € menos. ¿Cuántos socios hay en la peña y cuál es la cuota mensual que paga cada socio?

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 9)

1.47. a) Si la inflación anual es del 3,2%, ¿cuánto habrá que pagar dentro de 4 años por una vivienda que cuesta actualmente 137.000€? Redondea los resultados a dos cifras decimales.

b) Calcula el precio que tenía una vivienda hace cuatro años, si actualmente cuesta 200.000€. Redondea los resultados a dos cifras decimales.

Ayuda: Si un objeto, por ejemplo, cuesta 2€ y la inflación anual es del 5%, pasado un año su nuevo precio será $(2 + 2 \times 0{,}05) = 2{,}10€$. Fíjate que esta cantidad final se puede escribir con factor común:

$$2 \times (1 + 0{,}05)$$

Pasado dos años la inflación afecta a esta cantidad de $2{,}10€$ y tendremos un nuevo precio (redondeado a dos decimales) igual a: $(2{,}10 + 2{,}10 \times 0{,}05) = 2{,}21€$. Y esta cantidad se puede escribir de forma más cómoda con factor común:

$$2{,}10 \times (1 + 0{,}05) \rightarrow \textit{que también se puede escribir} \rightarrow 2 \times (1 + 0{,}05) \times (1 + 0{,}05)$$

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 12)

1.48. Un jardín en forma de trapecio isósceles tiene una superficie de 1.000 metros cuadrados. Si la base menor mide 30m y la base mayor es el doble de la altura, ¿cuáles son las dimensiones?

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 16)

1.49. Juan es seis años más joven que su primo Pablo. La suma de sus edades es menor que 40. ¿Cuál es la edad máxima de Pablo?

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 19)

1.50. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 2 cm menos que la hipotenusa. Calcula las longitudes de los lados.

(solución: 1ºBach – Tema 1 – Apartado 14 – Ejercicio 20)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 2: TRIGONOMETRÍA

2.1. Dibuja la gráfica de la función seno en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$. Indica claramente las coordenadas de los cortes con los ejes y las coordenadas de los máximos y de los mínimos.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

2.2. Haz una tabla para 0º, 30º, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º y 360º, indicando su equivalencia en radianes y los valores de sus senos, cosenos y tangentes.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

2.3. Obtener las razones trigonométricas de 30º y 60º a partir de un triángulo equilátero de lado unidad.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

2.4. Obtener las razones trigonométricas de 45º a partir de un cuadrado de lado unidad.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

2.5. Llamando a $tg(x) = t$, deduce una fórmula para expresar el seno y el coseno en función de la variable t.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

2.6. Calcula:
a) $\cos\left[arcsen\left(\frac{1}{5}\right)\right]$
b) $\text{tg}\left[\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
c) $sen\left[2arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right]$
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 2)

2.7. Sabiendo que $cosec(\alpha) = \frac{-7}{4}$ y que α es un ángulo del cuarto cuadrante, deduce sin utilizar la calculadora. Si es necesario deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales).
a) $sec(\alpha)$
b) $tg(2\alpha)$. Ayuda: el valor de $tg(2\alpha)$ se calcula con la expresión $tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

2.8. Sabiendo que $sen(\alpha) = \frac{5}{13}$ y que α es un ángulo del segundo cuadrante, deduce:
a) $\cos(\alpha)$ b) $cotg(\alpha)$ c) $cosec(\alpha)$
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 5)

2.9. Sabiendo que α y β son dos ángulos del primer cuadrante que cumplen $sen(\alpha) = \frac{3}{5}$ y $\cos(\beta) = \frac{5}{13}$, calcula:
a) $sen(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$ c) $tg(2\alpha)$ d) $sen\left(\frac{\beta}{2}\right)$ e) $tg(\alpha)$
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

2.10. Obtener, si es posible, el ángulo x que cumpla la ecuación: $4 \cdot sen(x) = sen(2x)$.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

2.11. De un triángulo conocemos: $a = 10\,cm$, $B = 60°$ y $C = 50°$. Obtener los lados b, c y el ángulo A.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 13 – Ejercicio 1)

2.12. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados miden $13\,m$, $14\,m$ y $15\,m$.
(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 13 – Ejercicio 2)

2.13. De un triángulo conocemos: $b = 3\,cm, c = 2\,cm$ y $A = 60°$. Obtener el lado a y los ángulos B y C.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 14 – Ejercicio 1)

2.14. Calcula el área y el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio $5\,cm$.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 14 – Ejercicio 2)

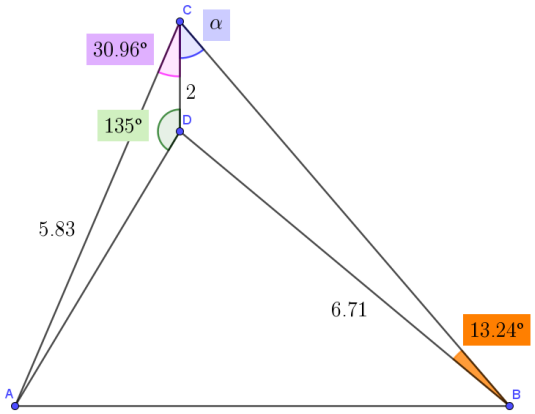
2.15. De un triángulo conocemos: $a = 8\,cm$, $b = 7\,cm$ y $C = 30°$. Calcula el lado c, el área del triángulo y el radio de la circunferencia circunscrita.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 15 – Ejercicio 1)

2.16. Un terreno triangular tiene $50\,m$ de longitud en uno de sus lados. Los otros dos lados forman, con el lado de $50\,m$, ángulos de $40°$ y $30°$ respectivamente. Calcula las longitudes de los lados.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 16 – Ejercicio 1)

2.17. Obtener la distancia que separa los vértices A y B de la figura, sabiendo que el ángulo α es inferior a 90 grados.



(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 16 – Ejercicio 3)

2.18. Demuestra la siguiente igualdad: $sen(x+y)sen(x-y) = sen^2x - sen^2y$.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 17 – Ejercicio 1)

2.19. Demuestra la siguiente igualdad: $\frac{sen(x+x)}{\cos(x+x)-1} = -cotg(x)$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 17 – Ejercicio 4)

2.20. Demuestra la siguiente igualdad: $cotg^2(x) - \cos^2(x) = cotg^2(x) \cdot \cos^2(x)$.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 17 – Ejercicio 5)

2.21. Resuelve:

$$\begin{cases} sen(x) + sen(y) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen(x) - sen(y) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 18 – Ejercicio 1)

2.22. Resuelve:

$$sen(x) = \frac{\cos(x)}{2}$$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 18 – Ejercicio 2)

2.23. Resuelve:

$$4 \cdot sen^2(x) + 2 \cdot \cos(x) = 4$$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 18 – Ejercicio 3)

2.24. Resuelve:

$tg(2x) = cotg(x)$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 18 – Ejercicio 6)

2.25. Resuelve:

$2\,tg(x) - 3\,cotg(x) - 1 = 0$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 18 – Ejercicio 7)

2.26. Resuelve:

$$\begin{cases} sen(x) + sen(y) = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$$

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 18 – Ejercicio 10)

2.27. Dos carreteras parten de un mismo punto, y forman entre si un ángulo de 60º. Desde el punto de intersección parten, simultáneamente por cada una, dos coches. El primero con una velocidad constante de 50 km/h y el segundo con una velocidad constante de 70 km/h. Calcula la distancia que existirá entre ambos coches al cabo de 10 minutos, asumiendo que las carreteras son completamente rectas (sin curvas).

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 1)

2.28. Las longitudes de los lados de un cuadrilátero son $7\,cm$, $8\,cm$, $9\,cm$ y $10\,cm$ respectivamente. El ángulo A que forman los lados de longitud $8\,cm$ y $9\,cm$ es de $68°$. Calcula las longitudes de las diagonales del cuadrilátero.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 4)

2.29. Un campo de fútbol mide $100\,m$ de largo y $60\,m$ de ancho. Una portería tiene una longitud de $5\,m$. Un jugador se encuentra en la intersección del centro del campo con una de las líneas laterales de saque de banda. Si dispara desde esa posición, ¿qué ángulo horizontal de tiro posee para que el disparo vaya entre los dos postes de la portería?

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 6)

2.30. Una persona de $1.80\,m$ de altura está en la calle. Ve el último piso de un edificio bajo un ángulo de 30º. Si avanza 10 metros hacia el edificio, ve el último piso bajo un ángulo de 45º. ¿Cuál es la altura del edificio? Haz un dibujo que ilustre el enunciado, indicando adecuadamente los datos de partida en el dibujo.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 7)

2.31. Un cuadro está colocado en una pared de forma que su extremo más alto se encuentra a 3 metros del suelo, y su extremo más bajo a 2.5 metros. Una persona de 175 centímetros de altura ve todo el cuadro bajo un ángulo de 5º. ¿A qué distancia de la pared está situada esa persona?

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 8)

2.32. Calcula las diagonales de un paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 centímetros respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35º. (Ayuda: un paralelogramo es un polígono de cuatro lados, que son paralelos dos a dos).

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 9)

2.33. Dos puntos A y B están separados por 3 metros a lo largo de la orilla de un río. Desde A se ve la copa de un árbol situado en la otra orilla bajo un ángulo de 36º. Y desde B la copa del árbol se aprecia bajo un ángulo de 52º.

El ángulo que separa A y B, visto desde la base del árbol, es de 95º. Calcula la altura del árbol.

(solución: 1ºBach – Tema 2 – Apartado 19 – Ejercicio 10)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 3: NÚMEROS COMPLEJOS

3.1. Resuelve $x^2 - 10x + 26 = 0$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

3.2. Expresar de forma binómica las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + x + 1 = 0$

b) $x^2 - 4 = 0$

c) $x^2 + 9 = 0$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

3.3. Dados los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 1 + 4i$ y $z_4 = 5 - 2i$, calcula $(z_1 + z_2) \cdot (z_3 - z_4)$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

3.4. Dados los complejos $z_1 = m + 3i$ y $z_2 = 5 - 2i$, calcula $m \epsilon \mathcal{R}$ para que se cumpla:

a) $z_1 \cdot z_2$ sea un número real

b) $z_1 \cdot z_2$ sea imaginario puro

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

3.5. Resuelve (obtener el valor de $x \epsilon \mathcal{R}$).

a) $(2 + 3i) + (1 - 5i)x = (4 + 2i) + (1 - i)x$

b) $(5 - i)x + (2 + i) = (1 - i) - (3 + 2i)x$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

3.6. Opera $\frac{2+3i}{1+i}$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

3.7. Calcular el valor de $a \epsilon \mathcal{R}$ para que el resultado de $\frac{2+ai}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

3.8. Sabiendo que z es un número complejo, resuelve la ecuación $\frac{z}{1+i} + \frac{z}{i} = 2i$ (obtener el valor de z).

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 4)

3.9. Calcula $x \epsilon \mathcal{R}$ para que el resultado del cociente $\frac{1+3i}{1+xi}$ tenga de módulo $\sqrt{5}$.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

3.10. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1 + 6i$ y que su cociente es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los números complejos es igual a uno.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 7)

3.11. Demuestra que para el complejo $z = \cos(x) - i \cdot sen(x)$ se verifica $\frac{1}{z} = \cos(x) + i \cdot sen(x)$.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 8)

3.12. Obtener la raíz cuadrada de $z = 3 + 4i$.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

3.13. Simplifica:

a) $\frac{i^{17}+i^{23}}{i^{16}+i^{33}}$ b) $\frac{i^{27}-i^{31}}{i^{101}+i^{32}}$ c) $\frac{2 \cdot i^{14}-3 \cdot i^{18}}{4 \cdot i^{73}+5 \cdot i^{21}}$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

3.14. Aplica el desarrollo del binomio de Newton a la cuarta potencia del número complejo $z = 2 - 3\,i$.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

3.15. Sea $z = 3 + 5i$.

a) Calcula su módulo y su fase.

b) Representa en el plano complejo a z, su opuesto y su conjugado.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

3.16. Calcula $a \epsilon \mathcal{R}$ y $b \epsilon \mathcal{R}$ sabiendo que el módulo de z_1 es 13, y que el producto $z_1 \cdot z_2$ es un número real.

$z_1 = 12 + ai$, $z_2 = b + 3i$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 9 – Ejercicio 1)

3.17. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 9 – Ejercicio 2)

3.18. Representa el afijo $z = (-8, 4)$ en su forma binómica, polar y trigonométrica.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

3.19. Determinar los valores reales $a \epsilon \mathcal{R}$ y $b \epsilon \mathcal{R}$ para que el cociente $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a $(\sqrt{2})_{45°}$.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 11 – Ejercicio 1)

3.20. El producto de dos números complejos es $3\,i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $\frac{1}{3}$. Calcula sendos números complejos.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 11 – Ejercicio 4)

3.21. Desarrolla la siguiente potencia y expresa el resultado final en notación polar, trigonométrica y binómica:

$(\sqrt{2} - i)^6$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

3.22. Resuelve $x^4 + 16 = 0$.

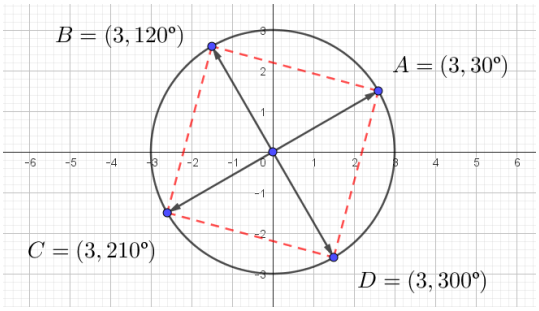
(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 13 – Ejercicio 1)

3.23. Opera y simplifica.

$$\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3} + i)^2}}$$

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 13 – Ejercicio 2)

3.24. La siguiente imagen del plano complejo muestra un cuadrado centrado en el origen de coordenadas. Obtener la longitud del lado del cuadrado. Ayuda: las coordenadas de los vértices del cuadrado de la imagen vienen en polares (módulo, fase).



(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 14 – Ejercicio 1)

3.25. Resuelve la ecuación $x^3 + x^2 + x = 0$ y relaciona el resultado con el Teorema Fundamental del Álgebra.

(solución: 1ºBach – Tema 3 – Apartado 17 – Ejercicio 2)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES. PROGRAMACIÓN LINEAL

4.1. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$.

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 7 de Sistemas – Ejercicio 1)

4.2. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-y+m\cdot z=0 \\ m\cdot x+2y+z=0 \\ -x+y+2m\cdot z=0 \end{cases}$.

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=-2$.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 7 de Sistemas – Ejercicio 2)

4.3. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{cases}$. Discutir sus posibles soluciones según el valor de $a \in \mathbb{R}$.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 8 de Sistemas – Ejercicio 1)

4.4. Sabemos que el sistema $\begin{cases} x+ay=1 \\ x+az=1 \\ y+z=a \end{cases}$ tiene una única solución y que se cumple $a \neq 0$. Encuentra la solución del sistema en función del parámetro a.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 9 de Sistemas – Ejercicio 2)

4.5. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$.

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 10 de Sistemas – Ejercicio 1)

4.6. a) Discute las soluciones del sistema $\begin{cases} x+my+z=2 \\ mx-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$ en función del parámetro m.

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $m=1$.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 10 de Sistemas – Ejercicio 2)

4.7. Discute el sistema según el parámetro real k: $\begin{cases} x+y+z=k \\ x-y+k\,z=1 \\ 2x+k\,y+z=k \end{cases}$

(solución: 2º Bach – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 6)

4.8. Dado el sistema $\begin{cases} 2a\,x+(a^2+a-2)y+2\,z=2 \\ a\,x-y+2z=0 \\ -a\,x+y-z=a \end{cases}$:

a) Discute el sistema según los valores del parámetro real a.

b) Resuelve, si es posible, para $a=-1$.

(solución: 2º Bach – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 9)

4.9. Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} m\,x+2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \\ x+3m\,y=m+2/5 \end{cases}$.

a) Discute los tipos de solución según los valores del parámetro real m.

b) Resuelve, si es posible, para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que se cumpla $x = 0$? Justifica tu respuesta.

(solución: 2º Bach – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 16)

4.10. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 11 de Sistemas – Ejercicio 1)

4.11. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

- El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.
- El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.
- El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 11 de Sistemas – Ejercicio 6)

4.12. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 11 de Sistemas – Ejercicio 7)

4.13. En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7,50€. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7,20€.

a) Calcula, de manera razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2€? Razona tu respuesta.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 11 de Sistemas – Ejercicio 8)

4.14. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5€, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 11 de Sistemas – Ejercicio 9)

4.15. En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

(solución: 2ºBach - Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 15)

4.16. Las restricciones de pesca de un país obligan a una empresa a pescar como máximo 2 toneladas de merluza y 2 toneladas de rape. Además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3 toneladas.

Si el precio de la merluza es de 6€/kg y el precio del rape es de 9€/kg, ¿qué cantidades debe pescar la empresa para obtener el máximo beneficio?

(solución: 1º Bach – Tema 4 – Apartado 4 de Programación Lineal – Ejercicio 1)

4.17. Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 24 de vitamina C cada día. Existen en el mercado dos productos P1 y P2, que en cada comprimido contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

- Un comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.

- Un comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A, 1 unidad de vitamina B y 3 unidades de vitamina C.

Cada comprimido P1 cuesta 10 céntimos y cada comprimido P2 cuesta 5 céntimos.

¿Cuántos comprimidos de cada tipo debe tomar al día para obtener el nivel de vitaminas indicado al menor coste económico?

(solución: 1º Bach – Tema 4 – Apartado 4 de Programación Lineal – Ejercicio 2)

4.18. Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70g de algodón y 20g de poliéster. Y para cada camisa estampada necesita 60g de algodón y 10 g de poliéster.

La empresa dispone para ello de 4200g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y, además, el número de estampadas debe ser al menos igual al doble del número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

(solución: 1º Bach – Tema 4 – Apartado 4 de Programación Lineal – Ejercicio 3)

4.19. Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kg de pintura mate necesita 0,4kg de producto A y 0,6kg de producto B. Cada kg de pintura brillante necesita 0,2kg de producto A y 0,8kg de producto B.

La empresa posee un máximo de 200kg de producto A y un máximo de 500kg de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200kg de pintura mate y al menos 300kg de pintura brillante.

El beneficio por kg de pintura mate es de 4€ y el beneficio por kg de pintura brillante es de 5€. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá? ¿Con la solución óptima, sobra alguna cantidad de los productos A y B?

(solución: 1º Bach – Tema 4 – Apartado 5 de Programación Lineal – Ejercicio 4)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 5: VECTORES

5.1. Calcula el valor de m para que $\vec{u} = (m, 5)$ tenga por módulo 13.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

5.2. Dados los puntos $A\left(\frac{-1}{2}, a\right)$, $B(1,0)$ y $C\left(\frac{-1}{2}, -a\right)$ halla el valor de a para que el triángulo ABC sea equilátero.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

5.3. Dado el triángulo de vértices $A(x, 2)$, $B(1,3)$ y $C(2, -1)$ halla el valor de x para que el triángulo ABC sea isósceles y su lado desigual sea el lado $\overline{AC}$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 1 – Ejercicio 4)

5.4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-4)$, $B(2,6,7)$, $C(5,-1,2)$. Obtener el cuarto vértice del paralelogramo.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

5.5. Dados los vectores $\vec{u} = (3,4)$, $\vec{v} = (-2,5)$, $\vec{w} = (-4,3)$:

a) Normalizarlos. Ayuda: Normalizar un vector es sinónimo a obtener su vector unitario.

b) Hallar el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

5.6. ¿Pueden existir dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$? Justifica la respuesta.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 3)

5.7. Sean los vectores $\vec{u} = (3, -4)$ y $\vec{v} = (5,6)$. Calcula:

a) Módulos y argumentos (ángulo con semieje positivo horizontal) de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y el ángulo que forman los dos vectores entre si.

c) Normalización del vector $\vec{u}$.

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$. Ayuda: Ortogonal es sinónimo de perpendicular.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 7 – Ejercicio 3)

5.8. Obtener el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (8,1,1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 7 – Ejercicio 6)

5.9. Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$. Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 7 – Ejercicio 7)

5.10. Determina todos los vectores $\vec{u} = (a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares al vector $\vec{v} = (-1,0,1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 7 – Ejercicio 12

5.11. Expresa el vector $\vec{u} = (5,3)$ del espacio vectorial $(V^2, +, \cdot)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1,5)$ y $\vec{w} = (2, -1)$. Ayuda: La expresión $(V^2, +, \cdot)$ significa que trabajamos con vectores de dos dimensiones, y que hemos definido una operación interna para sumar y otra operación externa para multiplicar (el producto escalar). La suma es una operación interna porque el resultado de la suma es otro vector. Mientras que el producto escalar es una operación externa porque su resultado no es otro vector, sino un número real.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 9 – Ejercicio 1)

5.12. Dados $\vec{u} = (1, -1,0)$, $\vec{v} = (2,0,1)$ y $\vec{w} = (-1,1,1)$ del espacio vectorial $(V^3, +, \cdot)$ expresa el vector $\vec{t} = (5, -3, -2)$ como combinación lineal de los otros tres.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 9 – Ejercicio 2)

5.13. Demuestra de manera razonada que los vectores $\vec{u} = (2,-1)$, $\vec{v} = (-3,2)$ y $\vec{w} = (1,0)$ del espacio vectorial $(\mathrm{V}^2,+,\cdot)$ están en combinación lineal. Ayuda: Este ejercicio lo puedes demostrar usando el concepto de rango y la dimension del espacio vectorial, o bien analizando los tipos de solución de la ecuación vectorial $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 9 – Ejercicio 3)

5.14. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,-1,0)$ y $\vec{w} = (m,0,0)$ sean linealmente independientes. Ayuda: La forma más directa para comprobar si un conjunto de vectores es linealmente independiente es calculando el rango del conjunto de vectores y comparando ese resultado con la dimensión del espacio vectorial.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

5.15. Determinar los valores de k que hacen linealmente independientes los siguientes vectores:

$\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,k+1,1)$, $\vec{w} = (1,1,k+1)$

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 10 – Ejercicio 7)

5.16. Estudiar el rango de los vectores $\vec{u} = (1,-1,1)$, $\vec{v} = (2,1,a)$ y $\vec{w} = (0,3,1)$ en función del parámetro a.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

5.17. Dados los vectores $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (-1,2)$ del espacio vectorial $(V^2,+,\cdot)$ comprueba que son linealmente independientes y que cualquier vector $\vec{w} = (x,y)$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$, por lo que forman un sistema generador. Ayuda: Puedes comprobar que un conjunto de vectores forma sistema generador calculando su rango y comparando el resultado con la dimensión del espacio vectorial, o bien analizando las soluciones de la ecuación vectorial $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = (x,y)$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 13 – Ejercicio 1)

5.18. Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ y $\vec{w} = (1,-1,1)$ del espacio vectorial $(\mathrm{V}^3,+,\cdot)$ demuestra que forman un sistema generador.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 13 – Ejercicio 3)

5.19. Dados los vectores $\vec{u} = (2,0)$ y $\vec{v} = (1,2)$ del espacio vectorial $(V^2,+,\cdot)$ demuestra que forman un sistema generador. Expresa $\vec{w} = (4,-4)$ como combinación lineal del sistema generador.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 13 – Ejercicio 4)

5.20. Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,0,1)$ y $\vec{w} = (0,1,0)$ demuestra que forman una base del espacio vectorial $(\mathrm{V}^3,+,\cdot)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = (10,4,-3)$ en dicha base. Ayuda: la forma más directa de comprobar que un conjunto de vectores forman una base es obtener su rango y comparar el resultado con la dimensión del espacio vectorial y con el número de vectores que forman el conjunto de partida.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 14 – Ejercicio 1)

5.21. ¿Forman una base ortogonal en tres dimensiones los vectores $\vec{u} = (2,2,0)$, $\vec{v} = (-2,2,0)$ y $\vec{w} = (0,0,2)$?

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 14 – Ejercicio 2)

5.22. Calcula a para que el conjunto de vectores $\vec{u} = \left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)$ y $\vec{v} = \left(2a,\frac{3a}{2}\right)$ sea una base ortonormal.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 14 – Ejercicio 3)

5.23. Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Pon un ejemplo numérico que compruebe cada afirmación.

a) Si hay tres vectores en V^2 que forman un sistema generador, seguro que no forman una base.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u}+\vec{v})$ y diferencia $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares entre sí.

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en V^2, verifican que $|\,\vec{u}+\vec{v}\,|^2 = |\,\vec{u}\,|^2 + |\,\vec{v}\,|^2$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 14 – Ejercicio 4)

5.24. Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(-1,2,0)$. Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 15 – Ejercicio 1)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 6: GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES: RECTAS Y CÓNICAS

6.1. Expresa la ecuación de las siguientes rectas.

a) Ecuación continua y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(3,2)$ y con vector director $\vec{v} = (1,4)$.

b) Ecuación canónica que pasa por $A(5,0)$ y $B(0,4)$.

c) Ecuación paramétrica que pasa por $A(2,1)$ y de pendiente $m = \frac{3}{5}$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

6.2. ¿Están alineados los puntos $A(-10,0)$, $B(0,3)$ y $C(6,5)$?

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

6.3. Halla las ecuaciones generales de las posibles rectas que, pasando por el punto $P(6,0)$, formen con los ejes cartesianos un triángulo de 12 unidades cuadradas.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

6.4. Dada la recta $r: x - 3y + 6 = 0$ halla el área del triángulo que forma con los ejes cartesianos.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 1 – Ejercicio 6)

6.5. Dadas las rectas $r: ax - 2y + 7 = 0$ y $s: \frac{x+1}{b} = \frac{y}{2}$, hallar a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(-1,2)$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

6.6. Obtener el ángulo que forma la recta $2x - 3y + 1 = 0$ con el eje horizontal.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

6.7. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta $r: 3x - 4y + 10 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

6.8. Calcula la distancia entre las rectas $r: 3x - 4y + 5 = 0$ y $s: 3x - 4y - 15 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

6.9. Halla la distancia del punto $P(1,0)$ a la recta $r: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

6.10. Dado el segmento de extremos $A(-7,3)$ y $B(5,11)$, halla la ecuación de su mediatriz.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

6.11. Obtener la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por el punto $A(3,0)$ y por el pie de la perpendicular, trazado desde A, a la recta $r: x - 2y + 6 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

6.12. Obtener el ángulo que forman las rectas $r: \sqrt{3}x + y - 5 = 0$ y $s: 3x - \sqrt{3}y + 1 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

6.13. Escribe la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(3,1)$ y forme un ángulo de 45º con la recta $r: x - 2y + 7 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

6.14. Encuentra la recta r que pasando por el punto $P(2,-7)$ sea paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, y la recta s que pasando por $P(2,-7)$ sea perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 5 – Ejercicio 7)

6.15. Calcula las bisectrices de los ángulos que forman las siguientes rectas al cortarse:

$r: x - y = 0$

$s: x = 0$

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 5 – Ejercicio 8)

6.16. Sea el triángulo de vértices $A(-1,-2)$, $B(0,5)$ y $C(3,1)$. Calcula el ángulo del vértice C. Calcula la mediana sobre el lado $\overline{AB}$. Calcula el área del triágulo.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

6.17. Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1),\ B(7,5)\ y\ C(x,y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de x e y.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x,y) tales que la anterior área sea 36 u^2.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

6.18. Halla el punto simétrico de $A(1,1)$ respecto de la recta $r: x - 3y - 12 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

6.19. Sea un segmento de extremo inicial $A(1,2)$ y extremo final $B(3,-2)$. Obtener los extremos del segmento simétrico respecto a la simetría central de centro el punto $P(0,5)$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 7 – Ejercicio 3)

6.20. Determinar los puntos del lugar geométrico del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(0,0)$ y $B(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 8 – Ejercicio 1)

6.21. Halla la ecuación de una circunferencia tal que los puntos $A(2,-1)\ y\ B(4,5)$ formen uno de sus diámetros.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 8 – Ejercicio 2)

6.22. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,0),\ B(0,2)\ y\ C(2,4)$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

6.23. Sea una circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2 unidades. Sea una segunda circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 unidades. Ambas circunferencias se cortan en los puntos A y B. Obtener la recta que une a los puntos A y B.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 9 – Ejercicio 2)

6.24. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en $(1,0)$ y radio 5 unidades. Halla la potencia del punto $Q(8,0)$ y del punto $T(3,4)$ respecto de dicha circunferencia.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

6.25. ¿Para qué valor de m la recta $x - y + m = 0$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$? Dibuja la solución con Geogebra, usando un deslizador para el parámetro m.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

6.26. Determina los puntos de intersección de la recta $r: x - y + 1 = 0$ y la circunferencia $C: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Dibuja la solución con Geogebra.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 11 – Ejercicio 1)

6.27. Sea la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$. Determinar si los siguientes puntos son externos, internos o pertenecientes a la circunferencia.

a) $(3,0)$ b) $(1,-2)$ c) $(3,1)$

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 11 – Ejercicio 2)

6.28. Sea la recta $r: x + 2y - a = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Calcula el parámetro a para que:

a) La recta y la circunferencia sean secantes en dos puntos.

b) La recta y la circunferencia sean tangentes.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 11 – Ejercicio 3)

6.29. Sea el triángulo delimitado por los cortes de las rectas $r: x = 0$, $s: y = 0$, $t: x + y + 2 = 0$. Dibuja el triángulo. Obtener la ecuación de la circunferencia circunscrita.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

6.30. Obtener la ecuación de una elipse centrada en $O(-1,1)$, semieje mayor $a = 5$ paralelo al eje de ordenadas y excentricidad $e = 0.1$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 14 – Ejercicio 1)

6.31. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6 unidades, respectivamente. Calcular la ecuación de dicha elipse si el centro coincide con el origen de coordenadas.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 14 – Ejercicio 3)

6.32. Calcula la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(8,3)$, con centro el origen de coordenadas, focos en el eje de abscisas y eje menor igual a 10 . Represéntala gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos A, A', B, B', F, F' de la elipse.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 14 – Ejercicio 4)

6.33. a) Determina la ecuación de las rectas tangentes a la elipse $2x^2 + y^2 = 8$ trazadas desde el punto $P(-1,5)$.

b) Obtener la ecuación de la elipse de focos sobre una recta paralela al eje de abscisas, centrada en $(-1,3)$, con semieje menor 8 y excentricidad $3/5$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 15 – Ejercicio 1)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 7: ESTADÍSTICA

7.1. En una clase de 30 alumnos, 2 alumnos han sacado una calificación de 2 en un examen. 4 alumnos un 3. 6 alumnos un 4. 4 alumnos un 5. 5 alumnos un 6. 3 alumnos un 7. 3 alumnos un 8. 2 alumnos un 9. Y un solo alumno un 10.

Obtener la media de la nota de la clase y su desviación típica (con dos cifras decimales redondeadas).

Si comparamos este aula con otra clase donde el coeficiente de variación ha resultado del 30%, ¿cuál de las dos clases presentan menor dispersión de los valores respecto de su media?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

7.2. Sea una población formada por los elementos 3, 4, 5 y 8. Se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2 con reemplazamiento.

a) Calcule todas las muestras posibles.

b) Calcule la media y la varianza de la población.

c) Calcule la media y la varianza de las medias muestrales.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

7.3. En un laboratorio de análisis clínicos, el 5% de las muestras que llegan no cumplen las condiciones requeridas para obtener resultados concluyentes en el análisis. Si se eligen 5 muestras, calcula:

a) La probabilidad de que de todas las muestras se puedan obtener resultados concluyentes.

b) La probabilidad de que de al menos dos no se obtengan resultados concluyentes.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 12)

7.4. Una fábrica de baterías para móviles ha detectado que una de sus máquinas produce un 10% de baterías defectuosas.

Si se han seleccionado al azar y de forma independiente 6 baterías:

a) Calcula la probabilidad de que exactamente cuatro baterías sean defectuosas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo la mitad sean defectuosas?

c) ¿Qué es más probable que ninguna sea defectuosa o que lo sean las seis?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 13)

7.5. Tiramos cinco veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 caras y 3 cruces?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

7.6. Una oficina consta de 10 teléfonos. La probabilidad de que a cierta hora del día un teléfono esté comunicando es del 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que a esa hora se marquen los 10 teléfonos y no se encuentren más de dos comunicando?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 3)

7.7. Una fábrica de bolígrafos establece en un 5% el porcentaje de bolígrafos con punta defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja de 8 bolígrafos haya más de 7 defectuosos? ¿Cuál es la media de bolígrafos defectuosos en una caja escogida al azar?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 4)

7.8. Se sabe que la probabilidad de que un dardo impacte en una diana es 0,4. Si se lanzan 9 dardos, determina:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de dardos que dan en la diana.

b) La media y la desviación típica de esta distribución.

c) La probabilidad de que al menos 5 dardos impacten en la diana.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 11)

7.9. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23º y desviación típica 5º. Calcular el número de días del mesen los que se espera alcanzar máximas entre 21º y 27º.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

7.10. La altura de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) Calcula qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) Calcula la altura máxima que es superada por el 33% de la población.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 7)

7.11. La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es de 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponemos que los pesos se distribuyen normalmente. Hallar cuántos estudiantes pesan:

a) Entre 60 kg y 70 kg.

b) Más de 90 kg.

c) Menos de 64 kg.

d) Exactamente 64 kg.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 4)

7.12. Las calificaciones finales de un colegio (de 0 a 10) siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 1,6. ¿Qué calificación acumula el 45% del alumnado?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 7)

7.13. En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono fijo en casa. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya más de 30 con teléfono fijo.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

7.14. Las notas de un examen sigue una distribución normal N(65,18). Se desea clasificar a los alumnos en tres grupos: nivel bajo, nivel medio, nivel alto. Se desea que en el nivel bajo haya un 20% de los alumnos, un 65% en el nivel medio y un 15% en el nivel alto. ¿Qué puntuaciones marcan el paso de un nivel a otro?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

7.15. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años.

Se sabe además que el 2,28% de los habitantes de esa ciudad tiene más de 60 años.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Si la edad de la población siguiera una distribución N(40,10), calcula el porcentaje de habitantes con menos de 35 años.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 8)

7.16. El peso de los estudiantes de determinada localidad sigue una distribución Normal de media 75 kg y varianza 36 kg^2.

a) Calcula el porcentaje de alumnado cuyo peso está comprendido entre 68 y 80 kg.

b) Si se sabe que uno de los estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 80 kg?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 9)

7.17. Se ha obtenido una muestra de 25 alumnos de una Facultad. Se desea estudiar la calificación media de los expedientes de los alumnos de la facultad. Se sabe, de cursos anteriores, que la desviación típica de toda la Facultad es 2,01.

La media de la muestra fue de 4,9.

Obtener la media de la población en el intervalo de confianza del 90% y al 99%.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

7.18. El peso de los individuos de una población se distribuye según una ley Normal de desviación típica 6 kg. Calcule el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95%, el peso medio en la población con un error no superior a 1 kg.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

7.19. Si la probabilidad de que una persona use gafas es del 10%, hallar la media de la distribución de personas que usen gafas al elegir 20 personas al azar y la desviación típica de la distribución.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 5)

7.20. La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga problemas dermatológicos es de 0,15. Dada una muestra de 50 personas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna tenga problemas dermatológicos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro tengan problemas dermatológicos?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 9)

7.21. La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 6 meses es del 20 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 15 peces de esta especie nacidos este mes, halla la probabilidad de que al menos 2 de ellos sigan vivos dentro de 6 meses.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 300 peces de esta especie nacidos este mismo mes, halla la probabilidad de que al cabo de 6 meses hayan sobrevivido al menos 50 de ellos.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 13)

7.22. Sea una distribución normal tipificada. Calcula:

a) Calcula el valor de k que cumple $P(Z \leq k) = 0{,}8485$.

b) Calcula el valor de k que cumple $P(Z \geq k) = 0{,}9972$.

c) Calcula el valor de k que cumple $P(1 \leq Z \leq k) = 0{,}15$.

d) Calcula el valor de k que cumple $P(Z \leq 2 + k) = 0{,}9896$.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 15)

7.23. Sea una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Calcula $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 17)

7.24. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una opción correcta y una opción incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 preguntas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 18)

7.25. En un barrio el 60% de los hogares tiene al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan al menos dos televisores?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 19)

7.26. Los resultados de un examen tienen una media de 78 y desviación típica 36. Se supone distribución normal.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se presente al examen y obtenga al menos una puntuación igual a 72?

b) Se declaran como "No Aptos" el 25% de los alumnos con las notas más bajas. ¿Qué proporción de estudiantes obtiene en su examen una nota que supera en al menos 5 puntos a la nota que marca la frontera entre "No Apto" y "Apto"?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 20)

7.27. En un pueblo habitan 700 hombres adultos, 800 mujeres adultas y 500 menores. De él se quiere seleccionar una muestra de 80 personas, utilizando, para ello, muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 22)

7.28. El porcentaje de familias españolas con un solo hijo es del 20%.

Tomamos una muestra de 1.000 familias. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos el 21% de las familias de la muestra tengan un solo hijo?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 23)

7.29. Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 47,5 y 52,5?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 25)

7.30. El cociente intelectual de los alumnos de un centro educativo se distribuye según una ley Normal de media 110 y desviación típica 15. Se extrae una muestra aleatoria simple de 25 alumnos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media del cociente intelectual de los alumnos de esa muestra sea superior a 113?

b) Razone cómo se vería afectada la respuesta a la pregunta anterior si el tamaño de la muestra aumentase.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 26)

7.31. En los individuos de una población, la concentración de una proteína en sangre se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.42 g/dl. Se toma una muestra aleatoria de 49 individuos y se obtiene una media muestral de 6,85 g/dl.

a) Obtenga un intervalo de confianza, al 96%, para estimar la concentración media de la proteína en sangre de los individuos de esa población.

b) ¿Es suficiente el tamaño de esa muestra para obtener un intervalo de confianza, al 98%, con un error menor que 0.125 g/dl?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 28)

7.32. El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria Normal con media μ y desviación típica 7 gramos. Se sabe que 36 tabletas, elegidas al azar, han dado un peso total de 5274 gramos (¡Ojo! El valor 5274 es el peso total de las 36 tabletas).

a) Calcule un intervalo con un nivel de confianza del 94% para la media μ.

b) Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar como muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 29)

7.33. Una variable aleatoria X se distribuye de forma Normal, con media μ y desviación típica $\sigma = 0.9$.

a) Una muestra aleatoria de tamaño 9 ha proporcionado los siguientes valores de X:

7.0, 6.4, 8.0, 7.1, 7.3, 7.4, 5.6, 8.8, 7.2

Obtenga un intervalo de confianza para la media μ, con un nivel de confianza del 97%.

b) Con otra muestra, se ha obtenido que un intervalo de confianza para μ, al 95%, es el siguiente (6.906, 7.494). ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizada?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 30)

7.34. En un estudio de mercado del automóvil en una ciudad se ha tomado una muestra aleatoria de 300 turismos, y se ha encontrado que 75 de ellos tienen motor diésel. Para un nivel de confianza de 94%:

a) Determine un intervalo de confianza de la proporción de turismos que tienen motor diésel en esa ciudad.

b) ¿Cuál es el error máximo de la estimación de la proporción?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 31)

7.35. Una empresa consultora quiere estudiar algunos aspectos de la vida laboral de los trabajadores de una ciudad. Para ello selecciona una muestra aleatoria de 500 trabajadores, de los que 118 afirman residir en otra ciudad. Con un nivel de confianza del 93%,

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de trabajadores que residen fuera.

b) Calcule el error cometido en el intervalo anterior.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 32)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 8: FUNCIONES Y LÍMITE

8.1. Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1,1)$, $(0,0)$ y $(-1,1)$. Calcula a, b y c.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 1 de Funciones – Ejercicio 1)

8.2. Sea la función $y = \frac{a}{x-b}$. Calcula a y b sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,1)$ y que el dominio de la función son todos los reales menos el valor $x = 7$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 1 de Funciones – Ejercicio 2)

8.3. Sea la función $y = a \cdot \sqrt{x+b}$. Calcula a y b sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,1)$ y que la función no está definida para valores inferiores a $x = -4$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 1 de Funciones – Ejercicio 3)

8.4. Razona de manera justificada el dominio de la siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$ c) $f(x) = \frac{x}{\cos(x)}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 2 de Funciones – Ejercicio 3)

8.5. Determina el dominio de la función $f(x) = \ln(x^3 - 4x)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 2 de Funciones – Ejercicio 8)

8.6. Obtener el dominio de $f(x) = \ln[\cos(x)]$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 2 de Funciones – Ejercicio 9)

8.7. Realiza la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ de las siguientes parejas de funciones:

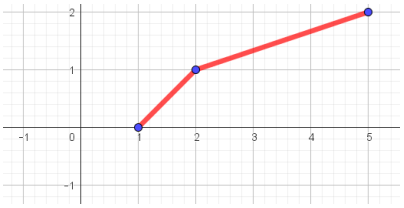
a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 4 de Funciones – Ejercicio 1)

8.8. La imagen de la derecha muestra la gráfica de $f(x)$.



Obtener de manera razonada los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 4 de Funciones – Ejercicio 5)

8.9. Sean las funciones $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 7$ y $h(x) = 3x - 2$.

Calcular sus inversas.

Comprobar que las respectivas composiciones de una función con su inversa dan lugar a la función identidad.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 4 de Funciones – Ejercicio 6)

8.10. Obtener la inversa de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y comprobar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 5 de Funciones – Ejercicio 2)

8.11. Estudia los límites laterales de $f(x) = \begin{cases} x+1 \ si \ x \leq 1 \\ 3x^2 - 1 \ si \ x > 1 \end{cases}$ en el punto $x_0 = 1$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 1 de Límites – Ejercicio 1)

8.12. Estudia los límites laterales de $f(x) = \begin{cases} x+1 \ si \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \ si \ x > 0 \end{cases}$ en el punto $x_0 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 1 de Límites – Ejercicio 3)

8.13. Resuelve:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 2 de Límites – Ejercicio 2)

8.14. Resuelve:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ b) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}$ d) $\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 3 de Límites – Ejercicio 1)

8.15. Resuelve:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+6}{3x^3-x+5}$

c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 4 de Límites – Ejercicio 1)

8.16. Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 4 de Límites – Ejercicio 2)

8.17. Calcula:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$ b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+6}{3x^2-x+5}$ c) $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4}$

d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3}$ e) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}}$ f) $\lim_{x\to +\infty}\frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 4 de Límites – Ejercicio 4)

8.18. Resuelve explicando adecuadamente cada paso:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5}\right)$ b) $\lim_{x\to +\infty}(8x-\sqrt{16x^2+x-3})$

c) Obtener el valor de a que cumple: $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\frac{1}{3}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 5 de Límites – Ejercicio 1)

8.19. Resuelve $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 5 de Límites – Ejercicio 2)

8.20. Resuelve $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 5 de Límites – Ejercicio 5)

8.21. Resuelve:

a) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2}{-2x^2+2}$ b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2-1}}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 6 de Límites – Ejercicios 1 y 2)

8.22. Estudia la continuidad de la función en $x=2$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x\neq 2\\ 3 & si\ x=2\end{cases}$$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 2 del PDF de problemas resueltos 7a)

8.23. Sea $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$. Estudia la continuidad en $x=-1$ y en $x=5$. Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 3 del PDF de problemas resueltos 7a)

8.24. Indica el valor de k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x}{2x-2} \ si \ x\neq\frac{1}{2}\\ k \ si \ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

sea continua en $x=\frac{1}{2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 4 del PDF de problemas resueltos 7a)

8.25. Estudia la continuidad de la función en $x=-2$ y en $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases}2 \ si \ x<-2\\ -x^2+6 \ si \ -2\leq x\leq 3\\ 1 \ si \ x>3\end{cases}$$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 5 del PDF de problemas resueltos 7b)

8.26. El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x)=\frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x=0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

b) ¿Y dentro de dos años?

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 8 del PDF de problemas resueltos 7b)

8.27. Determina a y b para que la función sea continua en los puntos frontera.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 \ si \ x<0\\ a\,x+b \ si \ 0\leq x\leq 3\\ \frac{x^2-9}{x-3} \ si \ x>3\end{cases}$$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 8 de Límites – Ejercicio 2)

8.28. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \ si \ x\neq 1 \ y \ x\neq 2\\ -\sqrt{2k+1} \ si \ x=1\end{cases}$ sea continua en $x=1$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 8 de Límites – Ejercicio 3)

8.29. Analiza la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}bx^2+ax \ si \ x<-1\\ \frac{a}{x} \ si \ -1\leq x<1, \ x\neq 0\\ \frac{x^2+ax+1}{x+1} \ si \ x>1\end{cases}$ en los puntos frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 8 de Límites – Ejercicio 4)

8.30. Sea $f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$, donde $a,\ b$ y c son números reales. Calcula los valores de $a,\ b$ y c sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y=2$, y que la gráfica pasa por el punto $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 9 de Límites – Ejercicio 1)

8.31. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-9}$ b) $f(x)=\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$ c) $f(x)=\frac{2x+5}{3x}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 9 de Límites – Ejercicio 2)

8.32. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 1)

8.33. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 5)

8.34. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0ºC se calienta y su dilatación viene dada por una función lineal $L=a+bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura grados Celsius.

a) Halla la expresión analítica de L, sabiendo que $L(1)=30{,}0005\ cm$ y que $L(3)=30{,}0015 cm$.

b) Representa gráficamente la función obtenida.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 11 de Límites – Ejercicio 2)

8.35. Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 11 de Límites – Ejercicio 3)

8.36. Representa gráficamente $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ tomando como referencia la gráfica de $g(x)=x^2$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 11 de Límites – Ejercicio 4)

8.37. Sea la función $f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}$. Hallar los parámetros a y k sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una A.V.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

8.38. Sea la función $g(x)=\frac{m\,x^3}{(x-n)^2}$. Hallar los parámetros m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la función.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 6)

8.39. Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ \ si\ \ x<-1\\ a\,x+b\ \ si\ \ -1\le x<1\\ \frac{x^2}{x+1}\ \ si\ \ x\ge 1\end{cases}$ siendo a y b números reales.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 20)

8.40. Dibuja en el mismo sistema de referencia la gráfica de $sen(x)$ y de $cos(x)$ en el intervalo $[0\,,\pi/2]$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 7)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 9: DERIVADAS

9.1. Aplica la definición formal de derivada a $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

9.2. Halla la derivada de $f(x)=5x^2+2x-6$ en $x=-2$ mediante la definición formal de derivada.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

9.3. Aplica la definición formal de derivada a $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 2 – Ejercicio 5)

9.4. Deriva aplicando la tabla de derivación:

a) $f(x)=\frac{1}{2x^3+1}$ b) $f(x)=\ln(x^2-2x+1)$ c) $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+2}$ d) $f(x)=\frac{ln(x)}{e^x}$

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 3 – Ejemplos 8, 10, 12 y 17 del PDF de problemas resueltos 3a)

9.5. Deriva aplicando la tabla de derivación:

a) $f(x)=sen\left(\frac{x}{x+1}\right)$ b) $f(x)=arcotg(x)\cdot ln(x^3-2x^2)$ c) $f(x)=sen(x)\cdot \ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 3 – Ejemplos 20, 26, 33 del PDF de problemas resueltos 3a)

9.6. Calcula el crecimiento, decrecimiento y las abscisas de los extremos relativos de $f(x)=x^3-x$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

9.7. Estudia los intervalos de crecimiento de:

a) $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$

b) $f(x)=ln(1-x^2)$

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 4 – Ejercicios 2 y 4)

9.8. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

9.9. Determina el punto (x,y) de la función $f(x)=x^3-x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

9.10. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en $x=-2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

9.11. Determina en qué punto de la gráfica de la función $f(x)=3\sqrt{6x}$, la recta tangente forma un ángulo de $45°$ con el eje de abscisas.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 4)

9.12. Sea la función $g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4$. Hallar los valores x de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0=2x+3y-4$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 6)

9.13. Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x)=x^2-4x+2$ que pasan por el punto $P(3,-5)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 9)

9.14. Sea la función definida por $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ para $x>0$ y $x\neq 1$.

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=e$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 10)

9.15. Calcula el área del triángulo que forma el eje horizontal OX con las rectas tangente y normal a la función $f(x)=-x^2$ en el punto $x=1$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 11)

9.16. Sea la función $f(x)=\ln(x^3-4x)$.

a) Determina el dominio de la función.

b) Halla la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x=-1$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 12)

9.17. Dada la función $f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ escribe la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 13)

9.18. Sea la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}x+k\ \ si\ \ x\leq 0\\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\ \ si\ \ x>0\end{cases}$.

a) Calcula el valor de k.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 14)

9.19. Calcule a y b para que $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de $45°$ con el eje OX.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 16)

9.20. Obtener la recta tangente y normal a $f(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}$ en $x=0$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 18)

9.21. Sea $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{6}-\frac{3}{2}\ \ si\ \ x<3\\ \ln(x-2)\ \ si\ \ x\geq 3\end{cases}$. Calcular los puntos de la gráfica en los que la pendiente de la recta tangente a la función es paralela a la recta $x+3y=0$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 20)

9.22. Considere las curvas $f(x)=3-x^2$ y $g(x)=\frac{-x^2}{4}$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de $g(x)$. Determina el punto de tangencia con la gráfica de $g(x)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 23)

9.23. Obtener los puntos de la gráfica de $f(x)=x^2+2x+4$ cuya recta tangente pase por el punto (0,0).

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 24)

9.24. Sea la función $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x+5$. Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2,f(-2))$ y $(2,f(2))$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 25)

9.25. Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en el dominio $[1,+\infty]$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcula los extremos relativos de la función y obtén el valor de la ordenada en cada extremo.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

9.26. Sea $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$. Hallar los extremos relativos y la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x=e$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

9.27. Hallar los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 4)

9.28. Hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=e^x(x^2-x+1)$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 5) extremos relativos
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 2) puntos de inflexión

9.29. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, razonar si $x=4$ es un punto de inflexión.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 8 – Ejercicio 2)

9.30. Obtener los puntos de inflexión de $g(x)=e^x-x$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

9.31. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.
a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.
b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de la función.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 8 – Ejercicio 5)

9.32. Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura de $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 1)

9.33. Sea $f(x)=x^3-2x+5$. Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la función en el punto de inflexión.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 3)

9.34. Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$. Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

9.35. Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.
Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

9.36. Obtener los extremos absolutos de $f(x)=(x^2-3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2,4]$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 10 – Ejercicio 3)

9.37. Obtener los extremos absolutos de $f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.
(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 10 – Ejercicio 4)

9.38. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t)=\frac{-t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10$$

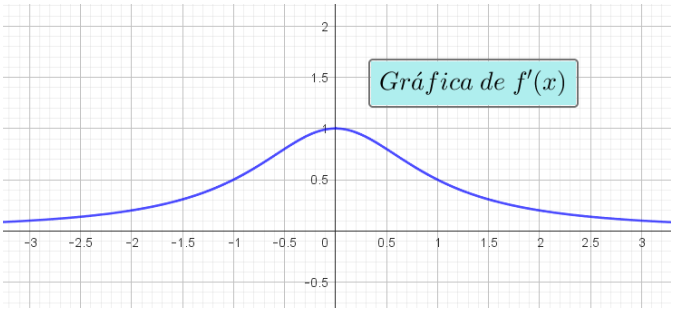
Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 6)

9.39. Estudia la monotonía, los extremos relativos y los puntos de inflexión de $f(x)$ a partir de la siguiente imagen, que muestra la gráfica de su derivada.



(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 11 – Ejercicio 2)

9.40. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ tenga un extremo absoluto en el punto $(2,-4)$ y su segunda derivada en $x = 2$ valga 4.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

9.41. Determina los valores $a,\ b\ y\ c$ de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que tenga un mínimo relativo en $x = 2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1) = 2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 2)

9.42. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función polinómica que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Determinar $a,\ b,\ c$ y d. ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 6)

9.43. Sea la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Determina $a,\ b$ y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 11)

9.44. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ tenga en $x = 1$ un punto crítico que no es extremo relativo y que la gráfica pase por el punto (1, 1).

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 14)

9.45. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = \frac{a\,x^2+b}{x+c}$ tenga una A.V. en $x = 1$, una A.O. de pendiente 2 y un extremo local suave en el punto de abscisa $x = 3$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 17)

9.46. Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln(x)}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 7)

9.47. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 9)

9.48. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)} = 1$, calcula los valores de a y b.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 15)

9.49. Calcula $\lim_{x\to\infty} x\left[arctg(e^x)-\frac{\pi}{2}\right]$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 14 – Ejercicio 1)

9.50. Calcula $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 14 – Ejercicio 2)

9.51. Calcula $\lim_{x\to 1}[\cos(\pi\, x)+2^x]^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 14 – Ejercicio 7)

9.52. Obtener b y c para que $f(x)=\begin{cases} x^2+b\,x+c \;\; si \;\; x\le 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} \;\; si \;\; x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 15 – Ejercicio 17)

9.53. Obtener a y b para que $f(x)=\begin{cases} a\cos(x)+2\,x \;\; si \;\; x\le 0 \\ a^2\ln(x+1)+\frac{b}{x+1} \;\; si \;\; x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 15 – Ejercicio 19)

9.54. Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 6 metros, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – Ejercicio 3)

9.55. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro que tenga la mayor área posible.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – Ejercicio 4)

9.56. Una lata de refresco cilíndrica tiene un volumen de 333 centímetros cúbicos. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – Ejercicio 5)

9.57. Encontrar el punto de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x-1}$ que se encuentre a la menor distancia del punto A(2, 0).

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

9.58. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 1)

9.59. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 3)

9.60. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 6)

9.61. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=e^{-x^2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 8)

9.62. Sean las funciones polinómicas $f(x)=x^3+2$ y $g(x)=-x^2+2x+2$. Dibuja sus gráficas en el mismo sistema de referencia y calcula los puntos de corte entre ambas funciones.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 12)

9.63. Estudia la continuidad y los tipos de discontinuidad de la función en los puntos frontera.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{x} & si\ -3<x<0\\ x^2+1 & si\ 0\le x<1\\ \dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-1} & si\ 1<x<5\end{cases}$$

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

9.64. Representa $f(x)=|-x^2-2x+3|$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

9.65. Halla la primitiva de $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ que pase por el punto (0, 1).

(solución: 2º Bach – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

9.66. Determina la función $F(x)$ sabiendo que $F''(x)=12x+3$ y que $F(1)=2$ y que $F'(0)=3$.

(solución: 2º Bach – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

Documento revisado y actualizado a fecha de 15 de septiembre de 2025.

Cualquier sugerencia o error detectado puede ser enviado al email danipartal@gmail.com .

Gracias por la ayuda de tantos alumnos que, durante años, han colaborado con la mejora de los contenidos de la web.